Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais

Ralph Teixeira, Heloísa Medeiros, Maria Lúcia Menezes

Universidade Federal Fluminense
E-mail address: ralph@mat.uff.br (02 Out 2017)

Sumário

Prefácio v

Capítulo 1. Motivação: a Equação do Calor 1
1.1. A Lei de Fick e a Equação do Calor Unidimensional 3
1.2. Exercícios 4

Capítulo 2. Ortogonalidade de Funções 5
2.1. Projeções Ortogonais 5
2.2. Funções são vetores! 6
2.3. Exercícios 9

Capítulo 3. Funções Periódicas 11
3.1. Exercícios 12

Capítulo 4. Séries de Fourier 13
4.1. Exercícios 17

Capítulo 5. Séries em Senos e em Cossenos 19
5.1. Expansões em Meia Escala 21
5.2. Exercícios 22

Capítulo 6. Derivação e Integração de Séries de Fourier 23
6.1. Exercícios 27

Capítulo 7. Forma Complexa da Série de Fourier 29
7.1. Série Complexa e Projeções Ortogonais 32
7.2. Exercícios 33

Capítulo 8. A Identidade de Parseval 35
8.1. Teorema de Parseval Complexo 37
8.2. Exercícios 37

Capítulo 9. Convergência Pontual e Uniforme 39
9.1. Exercícios 43

Capítulo 10. O Fenômeno de Gibbs 45
10.1. Exercícios 46

Capítulo 11. Método da Separação de Variáveis 47
11.1. A Equação do Calor 47
11.2. A Equação de Laplace 50
11.3. Exercícios 51

Capítulo 12. EDPs de Primeira Ordem 55
12.1. Exercícios 57

Capítulo 13. A Equação da Onda 59
13.1. Soluções Fracas 60
13.2. Exercícios 62

Capítulo 14. A Regra do Paralelogramo e a Corda Finita 65
14.1. Exercícios 67

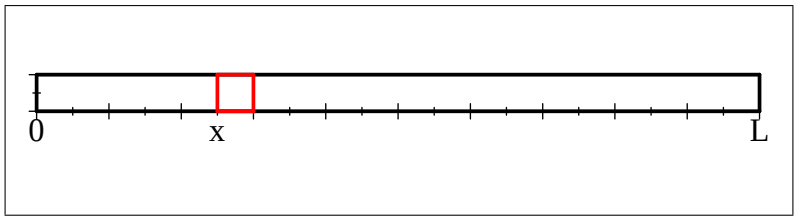
Prefácio

Estas são as notas de aula da disciplina Métodos Matemáticos I. Considere este resumo como **material de apoio, em fase de construção**. Por favor, não hesite em discutir erros e exercícios no site da disciplina.

CAPíTULO 1

Motivação: a Equação do Calor

Considere uma barra homogênea, de comprimento L, longa e fina, isolada termicamente do meio ambiente, exceto nas suas pontas, que são mantidas a temperatura constante (digamos que elas estão mergulhadas em água com gelo; assim, a temperatura ali é sempre 0). Sabendo uma distribuição inicial de temperatura na barra, gostaríamos de calcular como a temperatura da barra varia com o tempo.



Façamos um modelo matemático desta situação: seja $u(x,t)$ a temperatura da barra no ponto $x \in [0,L]$ no tempo $t \in [0,\infty)$. A distribuição inicial de temperatura seria uma função $f(x) = u(x,0)$. O fato das pontas estarem mergulhadas em gelo se traduz pela expressão $u(0,t) = u(L,t) = 0$ para qualquer tempo t. Falta apenas saber qual o processo de difusão de calor no interior da barra. Um modelo para este processo é dado pela Equação Diferencial Parcial (EDP)

$$u_t = Ku_{xx}$$

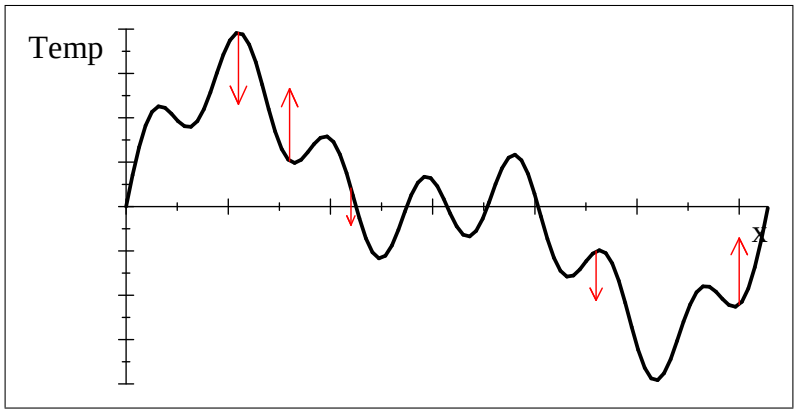
(onde K é uma constante chamada *difusividade térmica* que depende do material da barra). A dedução desta EDP a partir da Lei de Fick está no final deste capítulo – mas é possível entender este modelo a partir da seguinte interpretação da segunda derivada:

EXERCÍCIO 1. *Suponha que $g(x)$ é uma função de classe C^2 (isto é, $g''(x)$ existe e é contínua no domínio de g), e seja a um ponto no interior do domínio de $g(x)$ Mostre que*

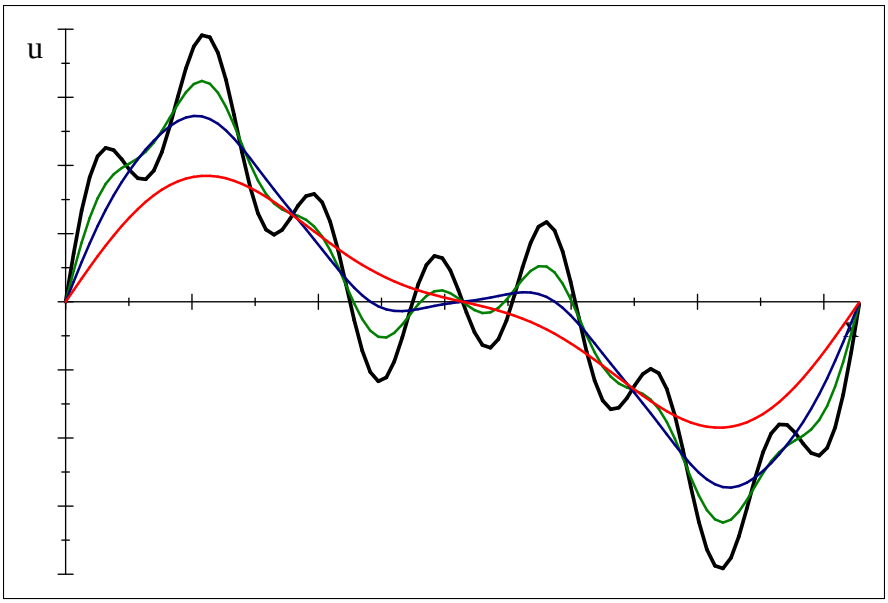
$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(a+h)+g(a-h)}{2} - g(a)}{\frac{h^2}{2}} = g''(a).$$

Ou seja, a segunda derivada "mede"quanto um ponto do gráfico está abaixo (da média) de seus vizinhos.

Com esta ideia em mãos, vejamos um exemplo mais concreto: fixe um tempo $t = 0$ e considere a temperatura da barra $g(x) = u(x,0)$ neste instante. Suponha que neste momento esta distribuição seja dada pelo gráfico abaixo



(ou seja, a barra inicialmente está em geral mais quente à esquerda, mais fria à direita, mas a temperatura oscila bastante de um ponto a outro). De acordo com a EDP $u_t = Ku_{xx}$, quanto maior for $g''(a) = u_{xx}(a,0)$ (isto é, se o ponto a é muito menos quente do que a média dos vizinhos), maior será a taxa $u_t(a,0)$ (isto é, a temperatura do ponto a subirá rapidamente). Em suma, pontos frios cercados de pontos mais quentes esquentam, e vice-versa, como esperamos. As setas acima indicam este efeito de suavização da temperatura original, e os gráficos abaixo indicam a evolução da temperatura para vários valores de t. Eles condizem com sua intuição sobre a difusão do calor?



Evolução nos tempos $t = 0$, $t = 2$, $t = 4$ e $t = 25$.

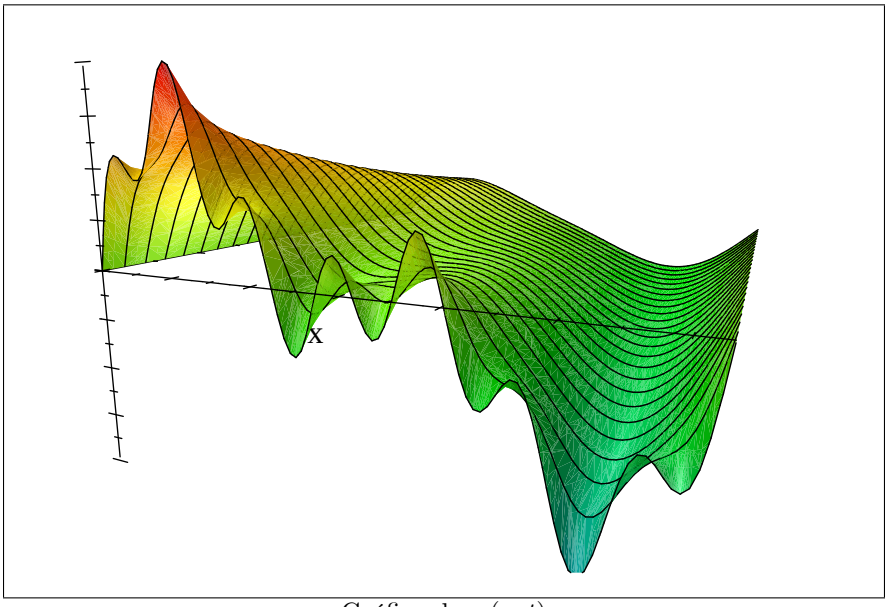


Gráfico de $u(x,t)$

Um dos objetivos desta disciplina é resolver problemas como o discutido acima, que se escreve:

$$\begin{cases} u_t = Ku_{xx} \text{ para } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ para } t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \text{ para } x \in (0,\pi) \end{cases}$$

(a primeira linha é a *Equação Diferencial Parcial (EDP)*, a segunda dá *Condições de Contorno*, e a terceira dá uma *Condição Inicial*).

Obviamente, a solução $u(x,t)$ vai depender da condição inicial $f(x)$, e a princípio a relação entre f e u parece complicada. Mas, para algumas condições $f(x)$ simples, é possível escrever explicitamente uma fórmula para $u(x,t)$!

EXERCÍCIO 2. *Tente adivinhar informalmente uma solução da equação do calor $u_t = u_{xx}$ com condições de contorno $u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$ para as condições iniciais abaixo.*
a) $u(x,0) = \sin x$*;*
b) $u(x,0) = \sin 2x$*;*
c) $u(x,0) = 3\sin x + 4\sin 5x$*;*
d) $u(x,0) = 4\sin x + 3.1\sin 2x + 1.8\sin 7x$.

Solução: a) Note que quando $u(x,0) = \sin x$, tem-se $u_{xx}(x,0) = -\sin x$. Ou seja, inicialmente, temos $u_t = -u$. Você conhece alguma função que, quando derivada com relação a t, troca de sinal? Bom, teríamos e^{-t}. Um pouco de criatividade nos leva então a tentar

$$u(x,t) = e^{-t}\sin x$$

Verfique que, de fato, isto é uma solução do problema do calor com as condições dadas!

b) Derivar $\sin 2x$ com relação a x duas vezes faz a função ser multiplicada por -4. Para que este termo também apareça na derivada com relação a t, basta fazer

$$u(x,t) = e^{-4t}\sin 2x$$

Verifique também esta solução!

c) Use um pouco de criatividade e note que a resposta é

$$u(x,t) = 3e^{-t}\sin x + 4e^{-25t}\sin 5x$$

d) A esta altura do campeonato, esperamos que você tenha notado que qualquer combinação linear de funções do tipo

$$u_m(x,t) = e^{-m^2 t}\sin(mx)$$

satisfaz $u_t = u_{xx}$ e também $u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$ para todo t. Basta agora "ajeitar"a combinação linear para que $u(x,0)$ seja a função dada. Neste caso, por exemplo, uma solução é

$$u(x,t) = 4e^{-t}\sin x + 3.1e^{-4t}\sin 2x + 1.8e^{-49t}\sin 7x$$

Para o leitor curioso, esta foi a fórmula que gerou os gráficos acima.

Em outras palavras, sempre que a condição inicial $u(x,0)$ puder ser escrita como combinação linear de senos, é fácil encontrar uma solução da EDP do calor multiplicando cada seno (em x) pela exponencial correta em t, isto é, trocando cada termo da forma $\sin mx$ pelo termo $e^{-m^2 t}\sin mx$.

A discussão acima, bastante informal, levanta várias questões importantes:

i) O que há de tão especial a respeito de senos para resolver a equação do calor?

Resposta parcial: os senos são "autofunções"da Equação do Calor com condições de contorno como as do exemplo acima. O conceito de autofunções pode ser estendido para outros problemas, como veremos mais tarde.

ii) E se a condição inicial não estiver escrita como uma combinação linear de senos? Será possível escrever (ou pelo menos aproximar) qualquer função $f(x) = u(x,0)$ como uma combinação linear de funções trigonométricas? Como encontrar os coeficientes corretos?

Resposta parcial: se $f(x)$ for periódica e contínua em seu domínio, então ela pode ser bem aproximada por uma combinação linear de funções trigonométricas. Este tópico é o que perseguiremos nas próximas aulas.

Então vamos destacar desde já a questão fundamental desta parte do curso: dada uma função $f(x)$, é possível escrevê-la ou aproximá-la como uma soma (talvez infinita, como as das séries de Taylor) de senos (e cossenos)? Ou seja, será que é possível escrever[1]

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos(mx) + b_m\sin(mx)\right) \ ?$$

e, em caso positivo, como encontrar os a_m e b_m a partir de $f(x)$?

1.1. A Lei de Fick e a Equação do Calor Unidimensional

Apesar da nomenclatura ser consagrada, a equação do calor descreve não só a maneira como calor se difunde em um meio homogêneo, mas serve para a difusão de qualquer substância que obedeça à Lei de Difusão de Fick:

PROPOSIÇÃO 3 (Lei de Difusão de Fick). *A difusão de uma substância A em uma substância B se propaga da região de maior densidade para as regiões de menor densidade; a taxa de difusão é proporcional ao gradiente da concentração de A em B.*

Em outras palavras, se v é a velocidade de propagação da substância A e ρ é a densidade de massa de A em B, então a Lei de Fick diz que

$$v = -K\,\nabla\rho$$

para alguma constante positiva K. No caso unidimensional, isto se resume a

$$v(x) = -K\frac{d\rho}{dx}$$

Queremos obter uma equação diferencial que, a partir desta lei, nos diga a variação da densidade ρ com o tempo. Para tanto, seja $M(x,t)$ a quantidade de massa no intervalo $I = [x_0, x]$ (para algum x_0 fixo) no tempo t. Uma simples lei de conservação de massa relaciona v com esta quantidade

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -v(x) + v(x_0)$$

[1] A constante a_0 aparece "dividida por 2"apenas para facilitar alguns cálculos que aparecerão mais tarde.

Mas a densidade é definida como $\rho(x,t) = \frac{\partial M}{\partial x}(x,t)$, portanto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial^2 M}{\partial x\, \partial t} = \frac{\partial\left(-v(x) + v(x_0)\right)}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Esta equação é simplesmente a lei de conservação de massa. Se agora utilizarmos a Lei de Fick, obtemos a seguinte equação para ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) = K\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x,t)$$

De fato, a equação diferencial acima foi estabelecida para a condução de calor em meios homogêneos por J. Fourier **antes** da sua interpretação como um processo de difusão explicitada acima (a analogia entre os processos de transporte de calor e transporte de matéria é que foi estabelecida por A. Fick, em 1855).

1.2. Exercícios

1) *Adivinhe* uma solução da equação do calor

$$\begin{aligned} u_t &= c.u_{xx} \text{ para } x \in (0,L) \text{ e } t > 0 \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 \text{ para todo } t > 0 \\ u(x,0) &= 5\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \text{ para } x \in [0,L] \end{aligned}$$

Resposta: $u(x,t) = 5e^{-c\pi^2 t/L^2}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$.

2) *Adivinhe* uma solução da equação do calor

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \text{ para } x \in (0,\pi) \text{ e } t > 0 \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \text{ para todo } t > 0 \\ u(x,0) &= 4\sin^3 x \text{ para } x \in [0,\pi] \end{aligned}$$

Dica: relembre as identidades $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, *e* $\sin A\cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$.
Resposta: $u(x,t) = 3e^{-t}\sin x - e^{-9t}\sin 3x$

3) *Adivinhe* uma solução para

$$\begin{aligned} u_t &= Cu_{xx} \text{ para } x \in (0,L) \text{ e } t > 0 \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 \text{ para todo } t > 0 \\ u(x,0) &= \sum_{m=1}^{N} c_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \text{ para } x \in (0,L) \end{aligned}$$

Resposta: $u(x,t) = \sum_{m=1}^{N} c_m \exp\left(\frac{-Cm^2\pi^2 t}{L^2}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$

4) *Adivinhe* uma solução da equação da onda

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx} \text{ para } x \in (0,\pi) \text{ e } t > 0 \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \text{ para todo } t > 0 \\ u(x,0) &= 7\sin x \text{ para } x \in [0,\pi] \end{aligned}$$

Resposta: $u(x,t) = 7\cos 3t \sin x$.

CAPíTULO 2

Ortogonalidade de Funções

Lembremos novamente que o problema principal desta parte do curso é, dada uma função $f(x)$, encontrar coeficientes a_m e b_m tais que[1]

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{N} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right) \tag{1}$$

(mais tarde, tomaremos $N \to \infty$, e veremos se a soma converge para $f(x)$). Na Álgebra Linear, um problema bem conhecido era o de aproximar um vetor conhecido $\vec{v}$ como combinação linear de vetores de um conjunto $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_N\}$:

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{N} a_j \vec{w}_j$$

(provavelmente você trabalhava com $N = 3$).

Note a semelhança entre os dois problemas – se pudermos fingir que os vetores w_j são as funções do tipo $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ (bom, e talvez colocar $\vec{w}_0 = \frac{1}{2}$ para tomar conta da primeira constante a_0), e identificando $\vec{v}$ com $f(x)$, o problema é o mesmo – encontrar os coeficientes de uma combinação linear! Assim, precisamos rever brevemente alguns conceitos da Álgebra Linear.

2.1. Projeções Ortogonais

Dados dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer (com $\vec{w} \neq \vec{0}$) num espaço com produto interno (pense $\mathbb{R}^n$ por enquanto), qual o vetor paralelo a $\vec{w}$ que melhor aproxima $\vec{v}$? A resposta é dada pela projeção ortogonal:

Definição 4. *Seja $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo, e $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ A* projeção ortogonal *de $\vec{v}$ sobre (na direção) de $\vec{w}$ é o vetor*

$$\vec{p} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\right)\vec{w}$$

Proposição 5. *A projeção ortogonal tem as seguintes propriedades essenciais (com a notação acima)*
a) O vetor $\vec{v} - \vec{p}$ é ortogonal a $\vec{w}$ (justificando o nome);
b) De todos os vetores da forma $\lambda\vec{w}$ (onde $\lambda \in \mathbb{R}$), a projeção ortogonal é o que melhor aproxima $\vec{v}$.
c) Em particular, $\vec{p} = \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes.

Demonstração. a) É uma conta imediata

$$(\vec{v} - \vec{p})\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} - \vec{p}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}(\vec{w}\cdot\vec{w}) = 0$$

b) Considere a distância (ao quadrado) entre $\vec{v}$ e um vetor genérico da forma $\lambda\vec{w}$

$$F(\lambda) = \|\vec{v} - \lambda\vec{w}\|^2 = (\vec{v} - \lambda\vec{w})\cdot(\vec{v} - \lambda\vec{w}) = \lambda^2(\vec{w}\cdot\vec{w}) - 2\lambda(\vec{v}\cdot\vec{w}) + \vec{v}\cdot\vec{v}$$

que é uma função quadrática de λ, a saber

$$F(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \text{ onde } a = \vec{w}\cdot\vec{w};\ b = -2\vec{v}\cdot\vec{w};\ c = \vec{v}\cdot\vec{v}$$

Como $a = \vec{w}\cdot\vec{w} > 0$, esta função tem mínimo em

$$\lambda = -\frac{b}{2a} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}$$

c) Como $\vec{p}$ é múltiplo de $\vec{w}$, a ida é óbvia; para a volta, tomando $\vec{v} = k\vec{w}$, vem

$$\vec{p} = \left(\frac{k\vec{w}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\right)\vec{w} = k\vec{w} = \vec{v}$$

□

[1] No exemplo principal do capítulo anterior, tínhamos $L = \pi$; mas nos exercícios você viu alguns exemplos que usam $L \neq \pi$. Por isso colocamos aqueles denominadores dentro dos senos e cossenos!

É muito comum usar projeções ortogonais em $\mathbb{R}^n$ para aproximar um vetor por outro... Está duvidando? Veja o exemplo a seguir:

EXEMPLO 6. *Um aluno faz n avaliações, tirando as notas $x_1, x_2, ..., x_n$. Assim, o desempenho deste aluno é representado por um vetor $\vec{v} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ Infelizmente, muita gente prefere resumir o desempenho deste aluno por um único número no final da disciplina (que horror!). Como escolher tal número?*
Em outras palavras, queremos aproximar o vetor de notas $\vec{v} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ por um vetor $\vec{v}_2 = (\alpha, \alpha, ..., \alpha)$, como se o aluno tivesse tirado uma única nota α em todas as avaliações – e é esse α que vai resumir o desempenho do aluno. Então temos um problema de aproximação: de todos os vetores ***múltiplos*** *de $\vec{w} = (1, 1, ..., 1)$, qual o que melhor aproxima $\vec{v}$? Resposta: a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$.... Agora termine a conta e descubra o valor de α. Era exatamente o que você esperava, não? Toda vez que você faz uma média aritmética, você está fazendo uma projeção ortogonal.*

E se quisermos projetar um vetor $\vec{v}$ num plano gerado por dois vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ (ou num subespaço S gerado por N vetores)? Temos:

DEFINIÇÃO 7. *Sejam $\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_N$ vetores não-nulos* ***ortogonais****, e seja S o subespaço por eles gerado. A* projeção ortogonal *de $\vec{v}$ sobre S é a soma das projeções de $\vec{v}$ sobre cada vetor $\vec{w}_i$, isto é*

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_i}{\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i} \right) \vec{w}_i.$$

COMENTÁRIO 8. *Preste atenção especial aos coeficientes $\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_i}{\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i}$, que são as coordenadas de $\vec{p}$ na base dos vetores $\vec{w}_i$.*

PROPOSIÇÃO 9. *A projeção ortogonal $\vec{p}$ do vetor $\vec{v}$ sobre o subespaço S tem as seguintes propriedades essenciais*
a) A projeção ortogonal é um vetor de S
b) O vetor $\vec{v} - \vec{p}$ é ortogonal a todos os vetores de S;
c) De todos os vetores de S, a projeção ortogonal é o que melhor aproxima $\vec{v}$.
d) Em particular, $\vec{p} = \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{p} \in S$.

DEMONSTRAÇÃO. A primeira propriedade é clara, pois $\vec{p}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{w}_i$ (que geram S). As outras são deixadas como exercícios para o leitor (vide final do capítulo). □

Mas talvez você esteja pensando... Isto tudo é lindo, funciona maravilhosamente para vetores de $\mathbb{R}^n$. Mas funções não são vetores.... são?

2.2. Funções são vetores!

Basicamente, quaisquer objetos que possam ser somados entre si (assim como vetores são somados entre si) e multiplicados por constantes (assim como você pode multiplicar um vetor por uma constante) podem ser considerados como vetores (desde que esta soma e multiplicação tenham as propriedades "usuais"). Formalmente, temos:

DEFINIÇÃO 10. *Um* ***espaço vetorial real*** *é um conjunto E (cujos elementos são chamados* ***vetores****) dotado de duas operações:*
i) Uma que associa um par de vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ à sua ***soma*** *(denotada por $\vec{v} + \vec{w}$);*
ii) Outra que associa um vetor $\vec{v}$ e um número real λ a seu produto (denotado por $\lambda\vec{v}$);
que têm as seguintes propriedades

- **Soma:**

$$\text{para quaisquer } \vec{u}, \vec{v} \text{ e } \vec{w} \in E\text{: } \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}; \qquad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

$$\text{existe um vetor (chamado nulo, denotado } \vec{0}) \text{ tal que para todo } \vec{u} \in E \text{ tem-se } \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

$$\text{cada vetor } \vec{u} \text{ tem um simétrico (denotado } -\vec{u}) \text{ tal que } \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

- **Multiplicação por escalar:**

$$\text{para quaisquer } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ e qualquer } \vec{u} \in E, \text{ tem-se } \lambda_1 (\lambda_2 \vec{u}) = (\lambda_1 \lambda_2) \vec{u}$$

$$\text{para todo } \vec{u} \in E \text{ tem-se } 1\vec{u} = \vec{u}$$

- **Distributividade:**

$$\text{para quaisquer } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ e qualquer } \vec{u} \in E, \text{ tem-se } (\lambda_1 + \lambda_2) \vec{u} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{u}$$

$$\text{para qualquer } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e quaisquer } \vec{u}, \vec{v} \in E \text{ tem-se } \lambda (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$$

Não é difícil ver que o conjunto de todas as funções reais de uma variável real é então um espaço vetorial – a soma de funções $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e a multiplicação por escalar $(\lambda f)(x) = \lambda.f(x)$ satisfazem todas as propriedades acima. Por exemplo, o vetor nulo é a função identicamente nula $\vec{0}(x) \equiv 0$. **Em suma, comece a pensar em funções como vetores!**[2]

Mas para fazer projeções ortogonais, não basta ter vetores – precisamos de produtos internos entre eles. O que seria um produto interno entre funções? Note que, nas contas acima, tudo que usamos foram propriedades distributivas de produtos internos, então qualquer operação que tenha tais propriedades serve! Formalmente:

DEFINIÇÃO 11. *Um* produto interno *em um espaço vetorial real E é uma função*

$$\begin{array}{rccccc} \langle , \rangle : & E & \times & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & , & v & \longmapsto & \langle u, v \rangle \end{array}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

Positividade::	$\forall v \in E,$	$\langle v, v \rangle \geq 0.$
Simetria::	$\forall u, v \in E,$	$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle;$
Linearidade::	$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in E$	$\langle \lambda_1 u + \lambda_2 v, w \rangle = \lambda_1 \langle u, w \rangle + \lambda_2 \langle v, w \rangle.$

(Alguns livros também exigem que $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = \vec{0}$ mas em nosso contexto, esta condição não será necessária.)

EXEMPLO 12. *Em $\mathbb{R}^n$, o produto interno usual (chamado **canônico**) é fazer, dados $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)$,*

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Em outras palavras, o produto interno canônico "multiplica as coordenadas correspondentes dos dois vetores e depois soma tudo".

EXEMPLO 13. *Dadas duas funções $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, definimos seu **produto interno canônico em** $[a, b]$ como*[3]

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \tag{2}$$

Note como este produto interno mantém a idéia de "multiplicar coordenadas correspondentes e depois somar tudo". Deixamos como exercício para o leitor verificar que este produto interno satisfaz, de fato, as propriedades dos produtos internos[4]. Vale a pena notar que estes não são os únicos produtos internos nestes espaços, mas são os mais usuais (veja exercícios)[5].

DEFINIÇÃO 14. *Dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em E são ditos **ortogonais** quando $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. Em particular, duas funções são **ortogonais em** $[a, b]$ quando*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$$

EXEMPLO 15. *As funções $\sin mx$ e $\sin nx$ (com m, n naturais positivos distintos) são ortogonais em $[-\pi, \pi]$. De fato*

$$\begin{aligned} \langle \sin mx, \sin nx \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)}{2} dx = \\ &= \left(\frac{\sin((m-n)x)}{2(m-n)} - \frac{\sin((m+n)x)}{2(m+n)} \right|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0 \end{aligned}$$

---

[2] Então a função $f(x) = x$ agora é um vetor. A função $g(x) = \arctan(e^x + \cos(x))$ é um outro vetor. Vá em frente e desenhe uma setinha para cada um no seu papel! A diagonal do paralelogramo com lados $f(x)$ e $g(x)$ é o vetor $(f+g)(x) = x + \arctan(e^x + \cos(x))$. A função $8g(x)$ é uma seta 8 vezes maior que $g(x)$, na mesma direção. Apenas lembre-se que as setinhas que você desenhou são arbitrárias, apenas para ajudar você a pensar nas funções como vetores (em particular, a setinha não tem nada a ver com o gráfico da função).

[3] Tecnicamente, para definir este produto interno, precisamos ter certeza que $\langle f, f \rangle$ é um número real – por este motivo, trataremos apenas das funções tais que

$$\int_a^b f^2(x)\, dx$$

é um número real. Tais funções são ditas *funções de quadrado integrável*, que são vetores de um espaço denominado $\mathcal{L}^2([a, b])$.

[4] Note que é possível ter uma função $f(x)$ que não é identicamente nula mas tal que $\langle f(x), f(x) \rangle = 0$ – por exemplo, tome $[a, b] = [0, 2]$ e considere $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \neq 1 \\ 1, \text{ se } x = 1 \end{cases}$. Se adicionássemos a condição $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ aos axiomas de produto interno, este problema poderia ser contornado, mas a maneira é sutil! Se você realmente quiser saber: um vetor de $\mathcal{L}^2([a, b])$ não é **uma** função, mas o conjunto de todas as funções tais que $\langle f - g, f - g \rangle = 0$. Em particular, o vetor nulo de $\mathcal{L}^2([a, b])$ é **qualquer** função $f(x)$ tal que $\int_a^b f^2(x)\, dx = 0$. Em particular, duas funções são o mesmo vetor se diferem em apenas um número finito de pontos! Surpreendentemente todos os axiomas de espaço vetorial e do produto interno são satisfeitos neste novo conceito de "vetor".

[5] Muitos usam $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ como produto interno canônico, o que praticamente não altera a teoria a seguir.

PROPOSIÇÃO 16. *As funções* $\vec{w}_m = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ *(*$m = 1, 2, 3, ...$*) e* $\vec{v}_n = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ *(*$n = 0, 1, 2, ...$*) são ortogonais duas a duas em* $[-L, L]$*, isto é*

$$\begin{aligned}
\left\langle \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\rangle &= 0 \text{ (para } m \neq n\text{)} \\
\left\langle \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\rangle &= 0 \text{ (para quaisquer } m \text{ e } n\text{)} \\
\left\langle \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\rangle &= 0 \text{ (para } m \neq n\text{)}
\end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned}
\left\|\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\|^2 &= \left\langle \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\rangle = L \text{ para } m = 1, 2, 3, ... \\
\left\|\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\|^2 &= \left\langle \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\rangle = L \text{ para } n = 1, 2, 3, ... \\
\|1\|^2 &= \langle 1, 1\rangle = 2L
\end{aligned} \tag{3}$$

DEMONSTRAÇÃO. São cálculos que deixamos como exercício para o leitor. □

Podemos agora repetir a definição de projeção ortogonal com nosso novo produto interno!

DEFINIÇÃO 17. *Sejam* $\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_N$ *vetores não-nulos* ***ortogonais****, e seja* S *o subespaço por eles gerado. A* projeção ortogonal *de* $\vec{v}$ *sobre* S *é a soma das projeções de* $\vec{v}$ *sobre cada vetor* $\vec{w}_i$*, isto é*

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_i\rangle}{\langle \vec{w}_i, \vec{w}_i\rangle} \vec{w}_i.$$

É importante notar que esta projeção ortogonal tem exatamente as mesmas propriedades que já havíamos citado – e a demonstração destas propriedades é **exatamente a mesma** (pois na demonstração tudo que usamos são as propriedades básicas do produto interno, que continuam valendo).

Então voltemos ao problema original: suponha que você quer aproximar uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ como uma soma de senos e cossenos, assim:

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} \cdot 1 + \sum_{m=1}^{N} \left(a_m \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

ou, pensando vetorialmente via $\vec{c}_n = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $\vec{s}_m = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$:

$$\vec{f} \cong \frac{a_0}{2}\vec{c}_0 + \sum_{m=1}^{N} a_m \vec{c}_m + b_m \vec{s}_m \tag{4}$$

Que coeficientes do lado direito produzem a melhor aproximação de $f(x)$? Ora, os vetores **ortogonais** $\vec{c}_m$ e $\vec{s}_n$ $(m, n \leq N)$ geram o subespaço S de todas as funções que podem ser escritas como a que está do lado direito da igualdade! Então a "melhor"aproximação seria a projeção ortogonal de f sobre E, cujos coeficientes sabemos calcular (lembra do comentário 8?)! Usando nosso novo produto interno, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{\left\langle \vec{f}, \vec{c}_0\right\rangle}{\langle \vec{c}_0, \vec{c}_0\rangle} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx \\
a_m &= \frac{\left\langle \vec{f}, \vec{c}_m\right\rangle}{\langle \vec{c}_m, \vec{c}_m\rangle} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\
b_m &= \frac{\left\langle \vec{f}, \vec{s}_m\right\rangle}{\langle \vec{s}_m, \vec{s}_m\rangle} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx
\end{aligned}$$

Em suma, **se** $f(x)$ **puder ser escrita na forma 4, espera-se que os coeficientes** a_m **e** b_m **sejam dados pelas fórmulas acima (e se** $f(x)$ não puder ser escrita na forma 4, ainda assim esta é a melhor aproximação de $f(x)$ que podemos conseguir usando tais senos e cossenos)**.**

Nos capítulos seguintes, usaremos tais coeficientes, e tomaremos $N \to \infty$, criando uma série chamada de *Série de Fourier* de $f(x)$. Será que a função $f(x)$ é igual à sua Série de Fourier? Ou seja, será que vale:

$$f(x) \stackrel{??}{=} SF(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)?$$

2.3. Exercícios

1) Em $\mathbb{R}^3$ verifique que $\vec{v}_1 = (3,1,-1)$ e $\vec{v}_2 = (-1,1,-2)$ são ortogonais. Seja $\vec{u} = (0,3,2)$
a) Calcule os coeficientes $a_j = \frac{\langle u, v_j\rangle}{\langle v_j, v_j\rangle}$, $j = 1,2$ da projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre o plano gerado por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
b) Faça um esboço que contenha $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{u}$, $a_1\vec{v}_1$, $a_2\vec{v}_2$ e $\vec{p} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$.
c) Calcule o vetor $\vec{r} = \vec{u} - \vec{p}$ e marque-o em seu esboço. Confira explicitamente que $\langle \vec{r}, \vec{p}\rangle = 0$. O que isto significa no esboço?

Resposta parcial: $a_1 = \frac{1}{11}$ *e* $a_2 = -\frac{1}{6}$.

2) Repita o problema trocando $\vec{u}$ respectivamente por:
I) $\vec{u}_2 = (1,3,-5)$
II) $\vec{u}_3 = (a,b,c)$.

Resposta parcial: este problema e o anterior ilustram o que já sabíamos:
– Se $\vec{u}$ puder ser escrito como combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, o item (1a) calcula coeficientes a_1 e a_2 tais que $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, como em (I);
– Se $\vec{u}$ não puder ser escrito como combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, ainda assim o processo é útil – o vetor $\vec{p} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$ não será $\vec{u}$, mas será a projeção ortogonal de $\vec{u}$ no plano gerado por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ (e, portanto, a diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{p}$ será a menor possível dentre os vetores $\vec{p}$ daquele plano).

3) Em $\mathbb{R}^3$ verifique que $\vec{v}_1 = (3,1,-1)$, $\vec{v}_2 = (-1,1,-2)$ e $\vec{v}_3 = (-1,7,4)$ são ortogonais dois a dois. Qual a maneira mais rápida de decompor um vetor $\vec{u} = (x,y,z)$ na base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$? [Obs: usar matrizes de passagem **não** é a maneira mais rápida!]

Resposta: $\vec{u} = \frac{3x+y-z}{11}\vec{v}_1 + \frac{-x+y-2z}{6}\vec{v}_2 + \frac{-x+7y+4z}{66}\vec{v}_3$.

4) Mostre que os seguintes pares de funções são ortogonais em $[-1,1]$:
a) 1 e x;
b) x e x^4;
c) $\sin \pi x$ e $\cos \pi x$;
d) $f(x)$ e $g(x)$ onde f é uma função par e g é uma função ímpar;
e) $\sin \pi x$ e $\sin 3\pi x$;

5) Quando vetores ortogonais têm norma 1, dizemos que são *ortonormais*. Mostre que o seguinte conjunto de vetores é **ortonormal** em $[-L, L]$:

$$\beta := \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \ (n = 1,2,3,...)$$

6) Encontre a projeção ortogonal da função $f(x) = x$ no subespaço gerado pelas funções $\vec{s}_1(x) = \sin x$, $\vec{c}_0(x) = 1$ e $\vec{c}_1(x) = \cos x$ (use o intervalo $[-\pi, \pi]$).

Resposta: $\vec{p} = 2\sin x$. *Note: enquanto é comum usar a aproximação* $\sin x \approx x$ **para** x **pequeno** *(Taylor), aqui obtivemos a aproximação* $x \approx 2\sin x$ – **para** $x \in [-\pi, \pi]$, *não apenas perto de* $x = 0$. *Esta é a melhor aproximação possível usando $\vec{s}_1$, $\vec{c}_0$ e $\vec{c}_1$, no sentido do nosso produto interno!*

7) Seja $\vec{p}$ a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$.
a) Mostre que $\vec{e} = \vec{v} - \vec{p}$ é ortogonal a $\vec{w}$. Em outras palavras pode-se decompor

$$\vec{v} = \vec{p} + \vec{e}$$

onde $\vec{p}$ é paralelo a $\vec{w}$, e $\vec{e}$ é ortogonal a $\vec{w}$, justificando a nomenclatura "projeção ortogonal".
b) Encontre a projeção ortogonal da função $f(x) = x$ sobre cada uma das funções $g_n(x) = \cos nx$ ($n = 0,1,2,...$ use o intervalo $[-\pi, \pi]$).
c) Encontre a projeção ortogonal da função $f(x) = x$ sobre cada uma das funções $h_n(x) = \sin nx$ ($n = 1,2,...$; use $[-\pi, \pi]$).

Resposta: b) Cada uma delas dá 0; c) $p_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx)$.

8) No texto, dissemos "de todos os vetores de E, a projeção ortogonal é o que melhor aproxima $\vec{v}$". Neste exercício, você vai demonstrar este fato, pelo menos no caso em que E é gerado por 2 vetores (sejam eles vetores do $\mathbb{R}^n$, ou funções!). Assim, são dados três vetores $\vec{v}$, $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ num espaço vetorial real, onde $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ são ortogonais e não-nulos. Desejamos aproximar $\vec{v}$ por uma combinação linear $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$ de maneira a minimizar o erro quadrático

$$erro(\alpha,\beta) = \|\vec{v} - (\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2)\|^2 = \langle \vec{v} - (\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2), \vec{v} - (\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2)\rangle$$

Encontre (em função de $\vec{v}$, $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ e seus produtos internos) os valores de α e β que minimizam este erro.

Dica: abra tudo para ficar com uma função quadrática de α e β. Qual é o método padrão que você conhece para minimizar uma função de 2 variáveis?

9) Mostre que a equação 2 no texto satisfaz, de fato, os axiomas de produto interno.

10) A fórmula da projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre o subespaço S de base $\{\vec{w}_i\}_{i=1,2,...,N}$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_i \rangle}{\langle \vec{w}_i, \vec{w}_i \rangle} \vec{w}_i$$

exige que os vetores $\vec{w}_i$ sejam **ortogonais**. Se a base não for ortogonal, ela tem que ser ortogonalizada primeiro, o que pode ser feito pelo *processo de ortogonalização de Gram-Schmidt*: a partir da base $\{\vec{w}_i\}_{i=1,2,...,N}$ de S, aplicamos o seguinte algoritmo

$$\begin{aligned}
\vec{\phi}_1 &= \vec{w}_1 \\
\vec{\phi}_2 &= \vec{w}_2 - \frac{\left\langle \vec{w}_2, \vec{\phi}_1 \right\rangle}{\left\langle \vec{\phi}_1, \vec{\phi}_1 \right\rangle} \vec{\phi}_1 \\
\vec{\phi}_3 &= \vec{w}_3 - \frac{\left\langle \vec{w}_3, \vec{\phi}_1 \right\rangle}{\left\langle \vec{\phi}_1, \vec{\phi}_1 \right\rangle} \vec{\phi}_1 - \frac{\left\langle \vec{w}_3, \vec{\phi}_2 \right\rangle}{\left\langle \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_2 \right\rangle} \vec{\phi}_2 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Mostre que o conjunto $\{\phi_i\}_{i=1,2,...,N}$ é uma base **ortogonal** do mesmo subespaço S. Assim, a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre o subespaço S seria

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left\langle \vec{v}, \vec{\phi}_i \right\rangle}{\left\langle \vec{\phi}_i, \vec{\phi}_i \right\rangle} \vec{\phi}_i.$$

Dica: suponha que $j > i$, e suponha que você já mostrou que ϕ_i é ortogonal a $\phi_1, \phi_2, ...\phi_{j-1}$. Agora escreva ϕ_j em termos de $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{j-1}$ e mostre que ϕ_i é ortogonal a ϕ_j.

CAPíTULO 3

Funções Periódicas

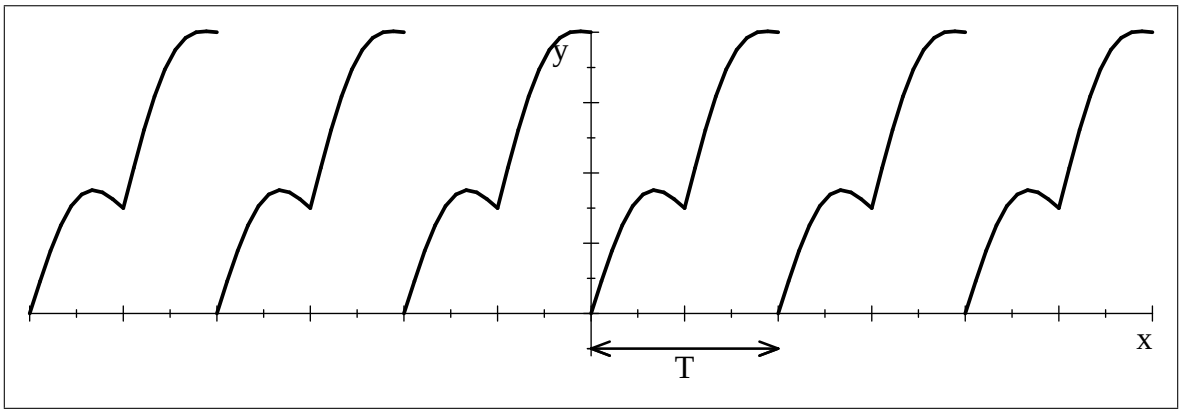
Queremos investigar se uma função $f(x)$ qualquer pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right) \tag{5}$$

Antes de responder esta pergunta, queremos examinar algumas propriedades simples das funções trigonométricas usadas do lado direito.

DEFINIÇÃO 18. *Uma função $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita* ***periódica de período*** *$T \neq 0$ se $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Graficamente, uma função $f(x)$ é periódica se seu gráfico "se repete de T em T unidades"na direção x.



EXEMPLO 19. *As funções $\sin x$ e $\cos x$ são periódicas de período 2π. A função $\tan x$ é periódica de período π. A função $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ (onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x) tem período 1.*

Note que, se T é período de uma função, então $2T$, $3T$, ..., kT,... também o são (com $k \in \mathbb{Z}^*$). Por exemplo, 4π também é um período das funções $\sin x$ e $\cos x$. No entanto, 2π é o *menor período positivo* de $\sin x$ (e de $\cos x$), e portanto é chamado de seu período fundamental.

DEFINIÇÃO 20. *O* ***período fundamental*** *de uma função periódica $f(x)$ é o seu menor período positivo.*

Curiosamente, a função $f(x) = K$ (constante) é periódica com qualquer período $T \neq 0$. Portanto, ela não tem um **menor** período positivo, e, assim, não tem período fundamental. Exceto por este exemplo patológico, pode-se mostrar que toda função periódica contínua tem um período fundamental.

PROPOSIÇÃO 21. *a) Se T é um período de $f(x)$, então $\frac{T}{k}$ é um período de $h(x) = f(kx)$.*
b) Se T é um período comum às funções $f(x)$ e $g(x)$, então T será também um período das funções $c_1 f + c_2 g$ e $f.g$ (para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).
c) Se T é um período comum às funções f_1, f_2, ..., f_m, ..., então T será também um período de $\sum_{m=1}^{\infty} c_m f_m(x)$ (se esta série convergir).

DEMONSTRAÇÃO. Vamos demonstrar apenas uma das afirmações acima – deixamos as outras como exercício. Seja $p(x) = (c_1 f + c_2 g)(x)$. Então:

$$p(x+T) = (c_1 f + c_2 g)(x+T) = c_1 f(x+T) + c_2 g(x+T) = c_1 f(x) + c_2 g(x) = p(x)$$

e, portanto, $p(x)$ é periódica. □

Da propriedade acima, rapidamente vemos que

- Como 2π é o período fundamental de $\sin x$, temos que $\frac{2L}{m}$ será o período fundamental de $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$. Em particular, $2L$ será um período de $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ (e de $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$);[1]

[1] Talvez seja mais familiar usar $w = \frac{m\pi}{L}$ (que representa a *frequência* das funções trigonométricas $\sin(wx)$ e $\cos(wx)$). Então o período fundamental é $T = \frac{2\pi}{w}$.

- Mas então $2L$ é um período comum a todas as funções do lado direito de 5 (incluindo a constante fora do somatório).

Conclusão: se há alguma esperança de que $f(x)$ possa ser escrita como uma soma do tipo 5, ela terá de ser periódica de período $2L$!

3.1. Exercícios

1) Mostre que 2π é, de fato, o período fundamental de $\sin x$.

Dica: suponha que T é um período positivo de $\sin x$; então $\sin(x+T) = \sin x$ para todo x; substitua $x = 0$ para mostrar que T é múltiplo de π; agora, mostre que $T = \pi$ não é período.

2) Encontre um período da função $f(x) = 4\sin\left(\frac{x}{7}\right) - 2\cos\left(\frac{x}{5}\right)$.

Resposta: basta tomar um múltiplo comum a 14π e 10π – por exemplo, 70π serve.

3) Mostre que, se $f(x)$ é periódica de período T, então

$$\int_C^{C+T} f(x)\,dx$$

não depende de C. Isto é, a integral de f num intervalo de comprimento T não depende do ponto inicial deste intervalo.

Dica: pense na expressão como uma função $F(C)$. Qual a maneira mais rápida de mostrar que F não depende de C?

4) a) Mostre que, se $f(x)$ é periódica de período T e diferenciável, então $f'(x)$ também é periódica de período T.

b) Se $f(x)$ é periódica, pode-se dizer que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ é periódica?

c) Mostre que, se $f(x)$ é periódica de período T e seu valor médio em $[0,T]$ é M, então $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - Mx$ é periódica.

Resposta: b) Não (experimente $f(x) = 1 + \sin x$, ou mesmo $f(x) = 1$).

5) a) Mostre que, se $\frac{a}{b}$ é racional (isto é, $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ com m e n inteiros), então $f(x) = \sin ax + \cos bx$ é periódica.

Dica: observe que $T = \frac{2\pi}{a}m = \frac{2\pi}{b}n$ será um período comum a ambas as funções trigonométricas.

b) Mostre que, se $f(x) = \sin ax + \cos bx$ é periódica, então $\frac{a}{b}$ é racional (ou $b = 0$).

Dica: se $f(x)$ é periódica de período T, devemos ter $f(-T) = f(0) = f(T)$.

CAPíTULO 4

Séries de Fourier

Inspirados pelas seções anteriores, somos levados à seguinte definição.

DEFINIÇÃO 22. *Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$ (integrável, absolutamente integrável). A* ***Série de Fourier de*** *$f(x)$ é*

$$f(x) \sim SF(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

onde

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \quad (m = 0,1,2,3,...) \\ b_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \quad (m = 1,2,3,...) \end{aligned}$$

são os ***coeficientes de Fourier*** *de $f(x)$.*

Note que usamos o símbolo "$\sim$"ao invés de "=", pois ainda não sabemos se a série do lado direito converge para $f(x)$ em algum sentido.

EXEMPLO 23 (Onda Triangular). *Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2π tal que $f(x) = |x|$ para $x \in [-\pi, \pi]$. Temos*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi \\ a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(mx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos mx\ dx \overset{\begin{array}{|c|c|}\hline u = x & dv = \cos mx dx \\ \hline du = dx & v = \frac{\sin mx}{m} \\ \hline \end{array}}{=} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin mx}{m}\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{\pi}\int_{-0}^{\pi}\frac{\sin mx}{m}dx = 0 + \frac{2}{\pi m}\left(\frac{\cos mx}{m}\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi m^2}\left((-1)^m - 1\right)\right. \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin(mx)\,dx = 0 \ \textit{(pois } |x|\sin mx \textit{ é uma função ímpar)} \end{aligned}$$

Em suma

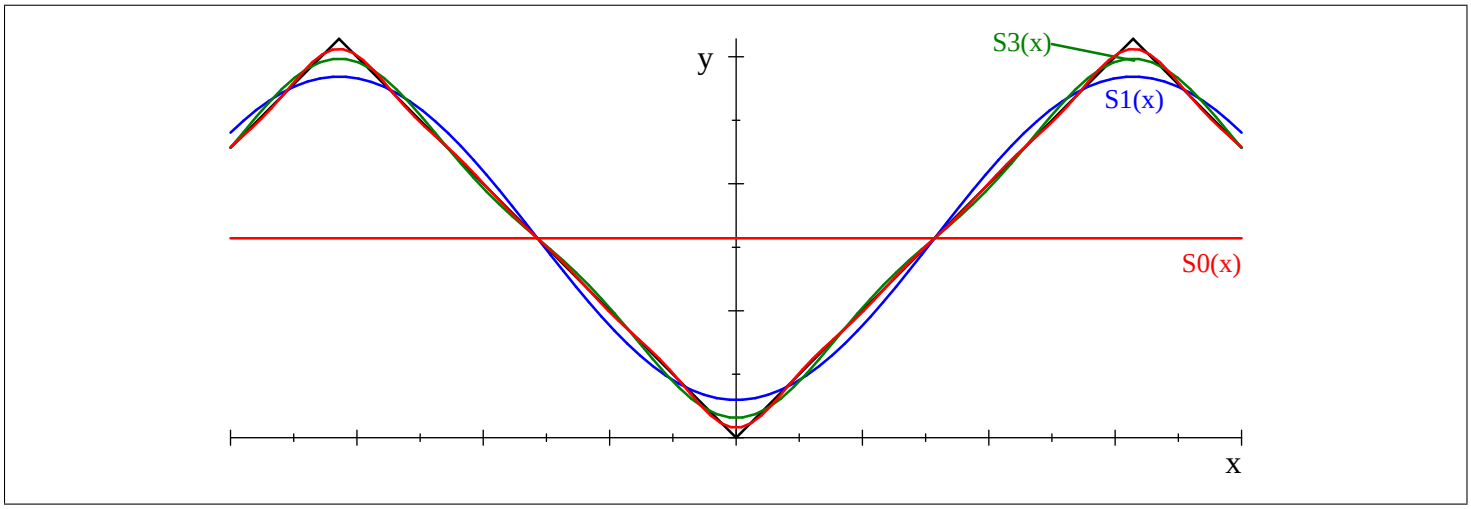
$$\begin{aligned} a_0 &= \pi \\ a_m &= \begin{cases} \frac{-4}{\pi m^2}, \textit{ se } m \textit{ é ímpar} \\ 0, \textit{ se } m \textit{ é par} \neq 0 \end{cases} \\ b_m &= 0 \textit{ para } m = 1,2,3,... \end{aligned}$$

ou seja, a série de Fourier de $f(x)$ é

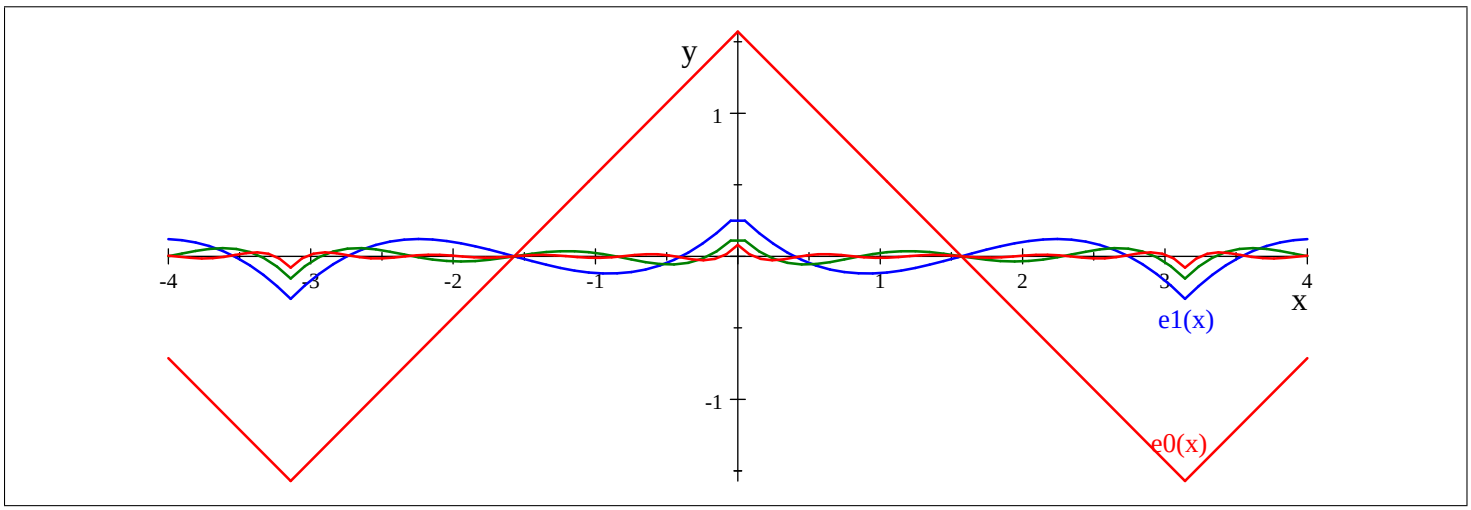
$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{m=1 \\ m\ \textit{ímpar}}}^{\infty} \frac{\cos mx}{m^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + ...\right)$$

No gráfico abaixo, exibimos a função $f(x)$ do exemplo acima e as somas parciais

$$\begin{aligned} S_0(x) &= \frac{\pi}{2} \\ S_1(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x \\ S_3(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9}\right) \\ S_7(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49}\right) \end{aligned}$$



Note como as somas parciais parecem convergir para $f(x)$. Para ilustrar melhor esta convergência, abaixo estão os gráficos das funções $e_n(x) = S_n(x) - f(x)$ para $n = 0, 1, 3, 7$. Numericamente, pode-se calcular que $|e_7(x)| \leq 0.008$ para todo x, ou seja, $S_7(x)$ aproxima $f(x) = |x|$ corretamente já com 2 casas decimais de precisão, independentemente de x.



COMENTÁRIO 24. *Uma observação sobre a notação de somatório. Neste texto, usaremos a notação*

$$\sum_{m=a:b}^{c} x_m$$

*para indicar um somatório onde o índice m vai de a até c **pulando de** b **em** b (ou seja, $m = a, a+b, a+2b, ...$). Assim, o somatório acima poderia ser escrito como*

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1:2}^{\infty}\frac{\cos mx}{m^2}$$

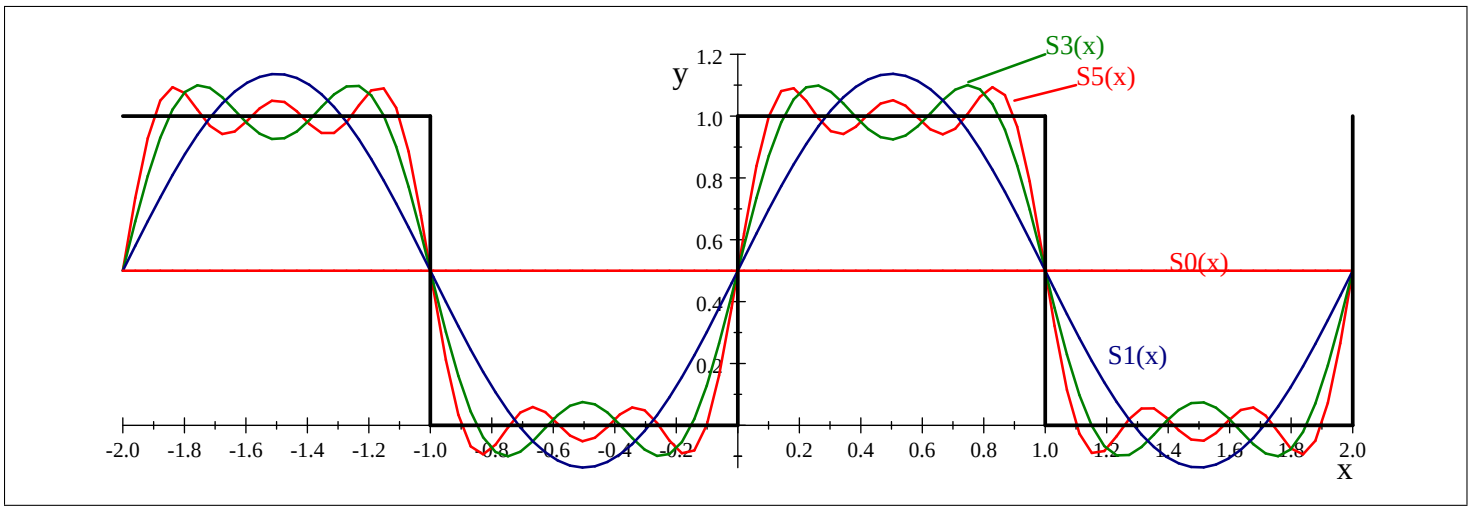
EXEMPLO 25 (Onda Retangular). *Tomemos agora uma função $g(x)$ periódica de período 2 tal que $g(x) = 0$ para $-1 < x < 0$ e $g(x) = 1$ para $0 < x < 1$. Calculemos os coeficientes de Fourier de $g(x)$:*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{0}^{1} g(x)\,dx = 1 \\ a_m &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} g(x)\cos(m\pi x)\,dx = \int_{0}^{1} \cos(m\pi x)\,dx = \left[\frac{\sin(m\pi x)}{m\pi}\right|_{x=0}^{x=1} = 0 \\ b_m &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} g(x)\sin(m\pi x)\,dx = \int_{0}^{1} \sin(m\pi x)\,dx = \left[-\frac{\cos(m\pi x)}{m\pi}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{(-1)^{m+1}+1}{m\pi} \end{aligned}$$

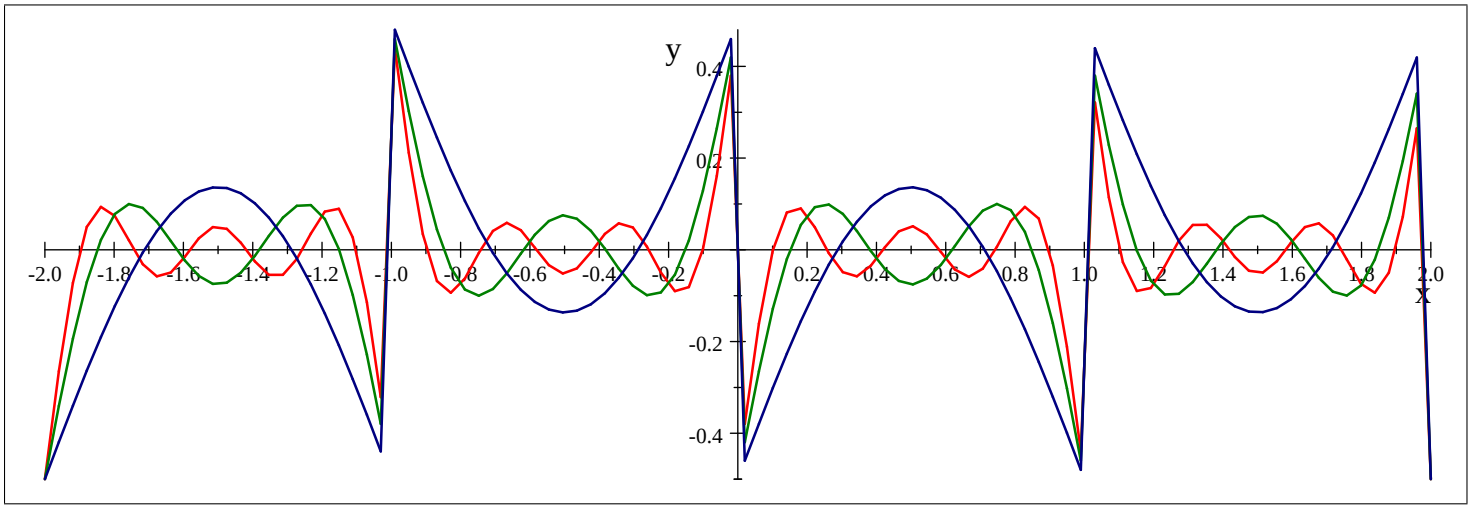
ou seja, $b_m = 0$ se m é par e $b_m = \frac{2}{m\pi}$ se m é ímpar. Portanto, a série de Fourier de $g(x)$ é

$$g(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1:2}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x)}{m} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5} + ...\right)$$

Abaixo estão os gráficos das somas parciais da série de Fourier de $g(x)$



e das diferenças entre $g(x)$ e tais somas



Note que, neste caso, a convergência já não parece tão boa. Em primeiro lugar, há uma grande oscilação residual no erro; apesar de termos $e_n(x) \to 0$ para cada x onde $g(x)$ é contínua (vide Teorema a seguir), veremos mais tarde que $\max_{x\in(0,1)}(|e_n(x)|)$ não vai para 0.

Os exemplos acima parecem indicar que a série de Fourier de $f(x)$ converge para $f(x)$ (pelo menos nos pontos onde $f(x)$ é contínua). Mais tarde discutiremos as várias maneiras pelas quais a série de Fourier representa a função $f(x)$, mas vamos desde já citar sem demonstração um resultado importante sobre esta convergência.

DEFINIÇÃO 26. *Uma função $f(x)$ é **seccionalmente contínua (ou contínua por partes) num intervalo finito** (a,b) quando for contínua em (a,b) exceto possivelmente em um número finito de pontos x_n onde existem e*

são finitos os seus limites laterais (denotados $f(x_0+)$ e $f(x_0-)$). Uma função $f(x)$ é ***seccionalmente contínua*** *quando é seccionalmente contínua em cada intervalo finito da reta real.*

EXEMPLO 27. *A função $f(x)$ do primeiro exemplo deste capítulo é contínua, então é seccionalmente contínua. A função $g(x)$ do exemplo acima é seccionalmente contínua (pois tem um número finito de descontinuidades em cada intervalo limitado, e nestas descontinuidades os limites laterais existem). A função $\tan x$* ***não é*** *seccionalmente contínua (apesar de ter um número finito de descontinuidades em cada intervalo limitado, o limite lateral $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x = +\infty$ não existe.*

DEFINIÇÃO 28. *Uma função $f(x)$ é* ***seccionalmente suave*** *(ou* ***suave por partes****) quando ambas $f(x)$ e sua derivada $f'(x)$ forem seccionalmente contínuas (com o entendimento de que a derivada pode não estar definida num número finito de pontos, mas os seus limites laterais $f'(x_0+)$ e $f'(x_0-)$ devem existir nesses pontos).*

TEOREMA 29. *Se $f(x)$ é seccionalmente suave, então para cada x_0 fixo a série de Fourier de $f(x)$ converge para*

$$\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$$

Em particular, se f é contínua em $x=x_0$, então a série de Fourier converge para $f(x_0)$ neste ponto.

Em termos das somas parciais

$$S_{\mathbf{N}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\mathbf{N}} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

o que estamos dizendo é que, se $f(x)$ for seccionalmente suave, então para cada x_0 real fixo

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x_0) = \frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}.$$

EXEMPLO 30. *Vimos que a série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 2π com $f(x)=|x|$ em $[-\pi,\pi]$ é*

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + ...\right)$$

Como $f(x)$ é seccionalmente suave, o Teorema acima se aplica. Agora, como $f(x)$ é contínua, nem precisamos dos limites laterais. Podemos escrever diretamente

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + ...\right) \text{ para } -\pi \le x \le \pi$$

Em particular, tomando $x=0$, obtemos uma bela identidade

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + ...\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + ... = \frac{\pi^2}{8}$$

EXEMPLO 31. *Por outro lado, a série de Fourier da onda retangular acima é*

$$g(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5} + ...\right)$$

Como $g(x)$ é seccionalmente suave, podemos então dizer que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5} + ...\right) \text{ para } 0 < x < 1 \\ 0 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5} + ...\right) \text{ para } -1 < x < 0 \end{aligned}$$

pois $g(x)$ é contínua em $(-1,0)$ e em $(0,1)$. Porém no ponto 0, a série não se aproxima de $g(0)$, mas sim de

$$\frac{g(0+)+g(0-)}{2} = \frac{1}{2}$$

o que pode ser facilmente confirmado substituindo $x=0$ na série de Fourier. Por outro lado, tomando $x=\frac{1}{2}$, obtemos outra bela identidade

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}$$

4.1. Exercícios

1) Obtenha a série de Fourier de $f(x) = 2\sin 3x + 4\cos 5x$.

Resposta: trivial. Se você não percebeu isso e fez milhares de contas, gastou tempo, mas aprendeu algo interessante!

2) Calcule as séries de Fourier de $f(x) = \sin^2(x)$ e $g(x) = \cos^5(x)$.

Dica: dá para fazer sem integrar – lembra da questão 2 do capítulo 1?

Resposta: $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ *e* $g(x) = \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x$.

3) (Sinal dente-de-serra) Calcule a série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 2π tal que $f(x) = x$ para $-\pi < x \leq \pi$.

Resposta: $x \sim 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\sin mx}{m} = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ...\right)$

4) Calcule as série de Fourier das seguintes funções:

a) $f_1(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se} \quad \sin(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad \sin(x) < 0 \end{cases}$

b) $f_2(x) = \begin{cases} e^x \ \ se \ \ -\pi \leq x < \pi \\ \text{periódica de período } 2\pi \end{cases}$

c) $f_3(x) = |\sin(wx)|$

Resposta:

$$\begin{aligned} f_1 &\sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{(4k^2-1)\,\pi}\cos(2kx) \\ f_2 &\sim \frac{2\sinh\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2+1}\cos mx + \frac{(-1)^{m+1}\,m}{m^2+1}\sin mx\right) \\ f_3 &\sim \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kwx\right) \end{aligned}$$

5) a) Escreva a série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 2π tal que $f(x) = 2x$ para $-\pi < x \leq \pi$.

b) Escreva a série de Fourier da função $g(x)$ periódica de período 2π tal que $g(x) = 2x$ para $0 < x \leq 2\pi$.

Resposta:

$$\begin{aligned} f &\sim 4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\sin mx}{m} \\ g &\sim 2\pi - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{m}\sin mx \end{aligned}$$

6) a) Qual a relação entre os coeficientes de Fourier das funções $f(x)$ e $g(x)$ e os coeficientes da série de Fourier de $\alpha f + \beta g$ (com α e β constantes)?

b) Como se relacionam os coeficientes de Fourier de $f(x)$ e de $g(x) = f(x) + \alpha$, com α constante?

c) Como se relacionam os coeficientes de Fourier de $f(x)$, função periódica de período $2L$, e de $g(x) = f(x+\alpha)$, com α constante?

d) Como se relacionam os coeficientes de Fourier de $f(x)$, função periódica de período $2L$, e de $g(x) = f(kx)$, com k constante?

Respostas: Sendo a_m *e* b_m *os coeficientes da série de* f *e* A_m *e* B_m *os da série de* g *:*

a) Os novos coeficientes serão $\alpha a_m + \beta A_m$ *e* $\alpha b_m + \beta B_m$ *respectivamente;*

b) $\frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2} + 2$*; os outros não mudam;*

c) $A_0 = a_0$*;* $A_m = a_m\cos\left(\frac{m\pi\alpha}{L}\right) + b_m\sin\left(\frac{m\pi\alpha}{L}\right)$ *;* $B_m = -a_m\sin\left(\frac{m\pi\alpha}{L}\right) + b_m\cos\left(\frac{m\pi\alpha}{L}\right)$*;*

d) Os coeficientes são exatamente os mesmos! O que muda é o valor do período, pois $L_g = \frac{L_f}{k}$*!*

7) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2 tal que $f(x) = x^2 + 1$ para $0 < x \leq 2$. Se $SF(x)$ é a série de Fourier de f, calcule $SF(0)$ e $SF(3)$.

Resposta: $SF(0) = \frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$ *e* $SF(3) = SF(1) = f(1) = 2$.

CAPíTULO 5

Séries em Senos e em Cossenos

DEFINIÇÃO 32. *Uma função $f(x)$ é **par** se seu domínio é simétrico com relação à origem e $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in Domf$.*

DEFINIÇÃO 33. *Uma função $g(x)$ é **ímpar** se seu domínio é simétrico com relação à origem e $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in Domf$.*

EXEMPLO 34. *As funções do tipo $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ são todas pares, enquanto as funções do tipo $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ são todas ímpares. A única função que é par e ímpar ao mesmo tempo é a função constante nula.*

Cuidado! Há funções que não são pares nem ímpares! Por exemplo, $f(x) = x^2 + x$ não é par nem ímpar ($f(-1) = 0 \neq \pm 2 = \pm f(1)$).

PROPOSIÇÃO 35. *Se $f(x)$ é par e $g(x)$ é ímpar, então*

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} f(x)\,dx &= 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx \\ \int_{-L}^{L} g(x)\,dx &= 0 \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 36. *Se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são pares e $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são ímpares (e c_1, c_2 são números reais quaisquer)*

$$\begin{aligned} c_1 f_1 + c_2 f_2 &\text{ é par (isto é, PAR+PAR} &&= PAR) \\ c_1 g_1 + c_2 g_2 &\text{ é ímpar (isto é, ÍMPAR+ÍMPAR} &&= ÍMPAR) \\ f_1(x) f_2(x) &\text{ é par (isto é, PAR.PAR} &&= PAR) \\ f_1(x) g_1(x) &\text{ é ÍMPAR (isto é, PAR.ÍMPAR} &&= ÍMPAR) \\ g_1(x) g_2(x) &\text{ é PAR (isto é, ÍMPAR.ÍMPAR} &&= PAR) \end{aligned}$$

Em geral, uma função par mais uma ímpar dá uma que não é par nem ímpar (a menos que uma delas seja constante). De fato, qualquer função $h(x)$ com domínio simétrico pode ser escrita como a soma de uma par com uma ímpar: basta tomar $f(x) + g(x)$ onde $f(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2}$ e $g(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{2}$ (verifique que f é par e g é ímpar!).

PROPOSIÇÃO 37. *Se $f(x)$ é par então $b_m = 0$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) em sua série de Fourier, e sua série de Fourier de $f(x)$ tem apenas **cossenos**. Se $g(x)$ é ímpar então $a_m = 0$ ($m = 0, 1, 2, 3, \ldots$) em sua série de Fourier. Em outras palavras, a série de Fourier de $g(x)$ tem apenas **senos.***

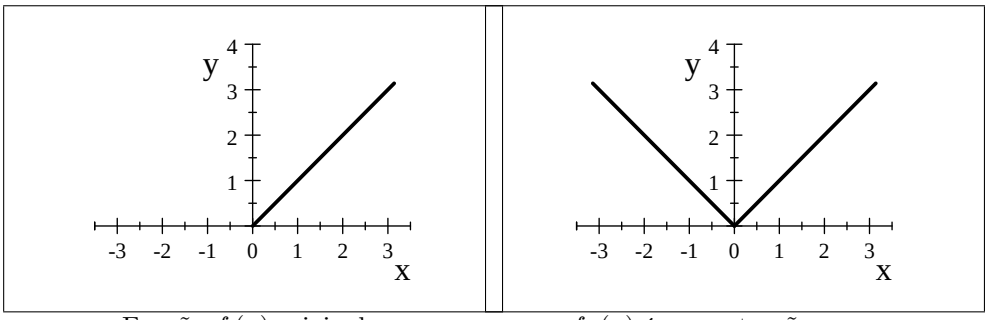
DEMONSTRAÇÃO. De fato, se $f(x)$ é função par então $f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ é função ímpar e, portanto

$$b_m = \int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = 0$$

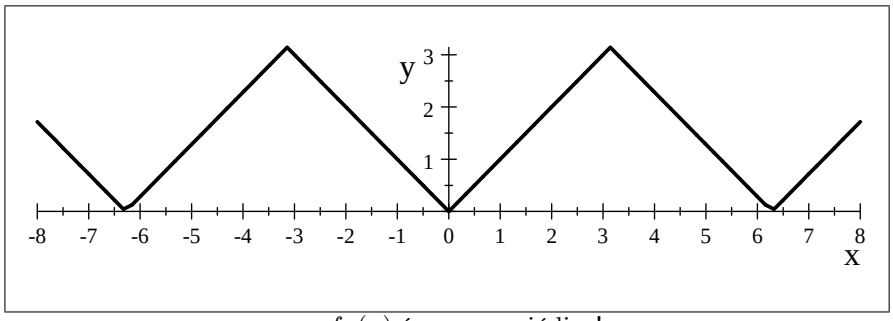
anulando todos os termos em senos da série de Fourier de $f(x)$. A demonstração para $g(x)$ é análoga. □

EXERCÍCIO 38. *Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Como escrever $f(x)$ como uma soma (infinita) que tenha apenas cossenos?*

Solução: se $f(x)$ for uma função par, podemos escrevê-la como uma soma de cossenos. Como a função desejada está definida apenas no intervalo $[0, \pi]$, basta estendê-la ao intervalo $[-\pi, 0]$ de maneira que ela seja par, ou seja, basta tomar $f(x) = -x$ em $[-\pi, 0]$. Agora estenda-a ao resto da reta de maneira que ela seja periódica, digamos, de período 2π (veja os gráficos abaixo):



Função $f(x)$ original $\qquad$ $f_1(x)$ é sua extensão par...



... e $f_2(x)$ é par e periódica!

Como esta última função é par e periódica de período 2π, sua série de Fourier terá apenas cossenos. Já fizemos este cálculo anteriormente; a série de Fourier desta última função é

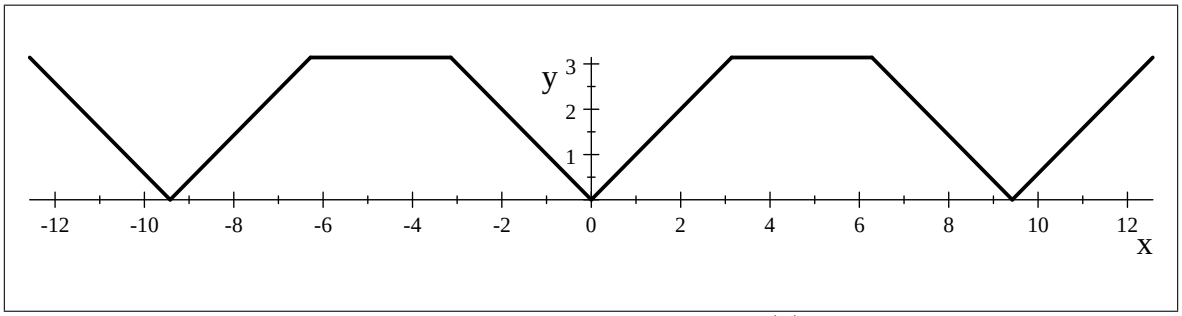
$$f_2(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + ...\right)$$

Como $f_2(x)$ é contínua, a igualdade acima está garantida. Por outro lado, como $f_2(x) = f(x)$ no intervalo $[0, \pi]$, podemos também escrever

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + ...\right)$$

pelo menos para $x \in [0, \pi]$.

Aliás, a opção acima não é a única forma de escrever $f(x)$ como soma de cossenos. Por exemplo, poderíamos primeiro estender $f(x) = \pi$ para $\pi \leq x \leq 2\pi$ e depois fazer a extensão par e periódica de período 4π, como na figura abaixo[1]



Outra possível extensão par de $f(x)$

Calculando a série de Fourier desta função de período $2L = 4\pi$, obtém-se uma outra série que converge para $f(x) = x$ para $0 \leq x \leq \pi$ – você consegue calcular esta nova série?

Em geral, dada uma função $f(x) : [0, L] \to \mathbb{R}$, sempre temos a opção de estendê-la ao intervalo $[-L, 0]$ de forma que ela seja par (ou ímpar), e daí estendê-la ainda mais para que ela seja periódica de período $2L$. Com isto obtém-se séries que representam $f(x)$ mas que têm apenas cossenos (ou senos). Não é difícil encontrar fórmulas que relacionam diretamente a função $f(x)$ aos coeficientes destas séries:

DEFINIÇÃO 39. *Dada $f(x) : [0, L] \to \mathbb{R}$ define-se sua* ***série em senos*** *como*

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right) \text{ onde } b_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

[1] Aliás, para ser preciso, você pode estender $f(x)$ *inventando* os valores que você quiser em $[\pi, A]$, depois estendê-la de forma par e enfim periódica de período $2A$; a série de Fourier da extensão convergirá para $f(x)$ onde quer que a extensão seja contínua!

Analogamente, sua ***série em cossenos*** *é*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) \text{ onde } a_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

Usando estas fórmulas, você nem precisa realmente trabalhar com as tais extensões pares ou ímpares – as fórmulas acima nos dão diretamente a série em senos ou cossenos usando apenas integrais no intervalo $[0, L]$. Mesmo assim, é bom lembrar que:

- A série em senos de $f(x) : [0, L] \to \mathbb{R}$ é a série de Fourier da extensão ímpar de $f(x)$ que tem período $2L$.
- A série em cossenos de $f(x) : [0, L] \to \mathbb{R}$ é a série de Fourier da extensão par de $f(x)$ que tem período $2L$.
- Usando outras extensões e outros períodos, é possível obter outras séries só com senos ou cossenos que representam $f(x)$.

5.1. Expansões em Meia Escala

Enfim, o resto desta aula trata de como obter séries de senos ou cossenos onde apenas os coeficientes de ordem ímpar (ou par) aparecem. Em outras palavras, observe o exemplo acima – o que a função $f_2(x)$ tem de especial para que a sua série de Fourier tenha apenas os cossenos de ordem ímpar[2]?

PROPOSIÇÃO 40. *Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$. Suponha também que $f(x + L) = -f(x)$ para todo x. Então na série de Fourier de $f(x)$ todos os termos de ordem par se anulam.*

DEMONSTRAÇÃO. De fato

$$a_m = \int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{0} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx + \int_0^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

Trocando u por x na primeira integral (apenas por conveniência) mas fazendo $u = x - L$ na segunda

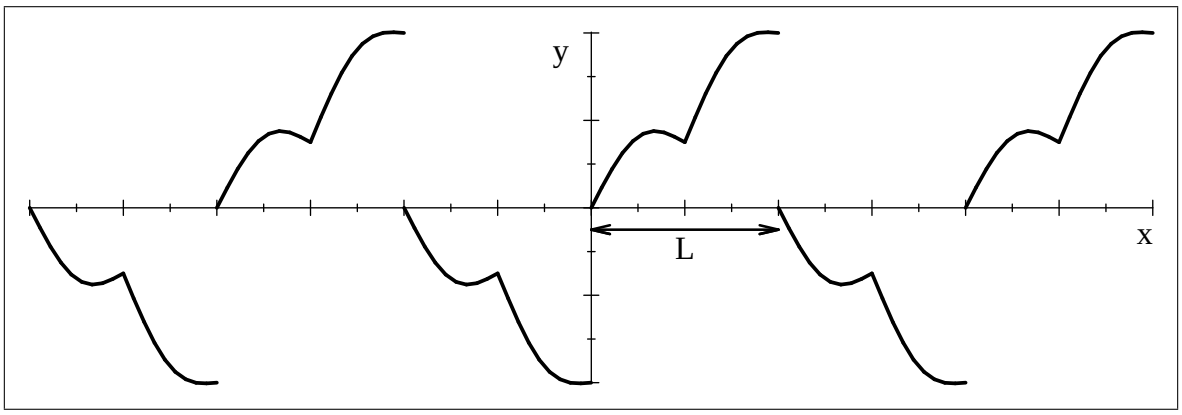
$$a_m = \int_{-L}^{0} f(u)\cos\left(\frac{m\pi u}{L}\right)du + \int_{-L}^{0} f(u+L)\cos\left(\frac{m\pi u}{L} + m\pi\right)du$$

Agora que os limites são os mesmos, podemos juntar tudo numa integral só e usar que $f(u + L) = -f(u)$ para todo u:

$$a_m = \int_{-L}^{0} f(u)\left(\cos\left(\frac{m\pi u}{L}\right) - \cos\left(\frac{m\pi u}{L} + m\pi\right)\right)du$$

Porém, se m é par, os dois cossenos se cancelam, então $a_m = 0$. A demonstração de que $b_m = 0$ para m par é totalmente análoga, trocando cos por sin. □

A condição $f(x + L) = -f(x)$ pode ser ilustrada pelo gráfico abaixo:



Existe também uma condição em $f(x)$ para que a série de Fourier contenha apenas termos de ordem par:

PROPOSIÇÃO 41. *Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$. Suponha também que $f(x + L) = f(x)$ para todo x. Se usarmos o período $2L$ para calcular a série de Fourier de $f(x)$, todos os termos de ordem ímpar se anulam.*

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é análoga à da proposição anterior. □

[2]Para ser exato, a série de $f_2(x)$ tem um cosseno de ordem par, que é a constante inicial $\frac{\pi}{2}$. A pergunta correta então seria: o que a função $f_2(x) - \frac{\pi}{2}$ tem de especial?

Vale observar que esta última proposição não é tão útil – se $f(x+L)=f(x)$ para todo x, então poderíamos usar L como período (ao invés de $2L$), chegando à série de Fourier desejada mais rapidamente, sem usar este teorema.

Em suma, para obter uma série de Fourier a partir de uma função definida apenas num intervalo limitado, você precisa pensar numa extensão periódica; no entanto:

- Se você quer uma série de Fourier só com senos, estenda a sua função de forma que ela seja ímpar;
- Se você quer uma série de Fourier só com cossenos, estenda a sua função de forma que ela seja par;
- Se você quer apenas os temos de ordem ímpar, estenda a sua função de forma que $f(x+L)=-f(x)$;
- Se você quer apenas os termos de ordem par, estenda a sua função de forma que $f(x+L)=f(x)$ (e use o período $2L$).

Enfim, nada impede que você misture as idéias acima para obter uma série apenas com senos de ordem ímpar, etc.

5.2. Exercícios

1) A seguir estão descritas 5 funções e 4 séries de Fourier. Para cada função, qual opção (a)-(d) melhor representa a sua série de Fourier (se alguma)?

$I)$ $f_1(x)=x^3$ se $x\in(-2,2]$; periódica de período 4
$II)$ $f_2(x)=x^3$ se $x\in(0,4]$; periódica de período 4
$III)$ $f_3(x)=e^x$ se $x\in(-\pi,\pi]$; periódica de período 2π
$IV)$ $f_4(x)=x^2+3x^4$ se $x\in(-1,1]$; periódica de período 2
$V)$ $f_5(x)=|\sin(x)|$

$a)$ $S_a=\frac{a_0}{2}+\Sigma_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi x}{2})+b_n\sin(\frac{n\pi x}{2})$
$b)$ $S_b=\Sigma_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin(\frac{n\pi x}{2})$
$c)$ $S_c=\frac{\gamma_0}{2}+\Sigma_{n=1}^{\infty}\gamma_n\cos(nx)$
$d)$ $S_d=\frac{\zeta_0}{2}+\Sigma_{n=1}^{\infty}\zeta_n\cos(nx)+\eta_n\sin(nx)$

2) Considere **cada** uma das funções $f_i(x)$ com **cada** uma das séries de Fourier $\mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_j(x)$ abaixo (são 30 pares!). Para cada um dos 30 pares, esboce o gráfico de uma extensão periódica de $f_i(x)$ cuja série de Fourier tenha o formato $\mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_j(x)$ (se tal extensão não existir, simplesmente responda tanto).

$i)$ $f(x)=|x|,\ x\in[-1,1]$
$ii)$ $f(x)=x^2+1,\ 0<x<2$
$iii)$ $f(x)=\sin(x),\ x\in[0,\pi]$
$iv)$ $f(x)=\begin{cases}2\ se\ x\in(0,1]\\ 0\ se\ x\in[-1,0]\end{cases}$
$v)$ $f(x)=\begin{cases}2x+1\ se\ x\in(0,1]\\ x^2\ se\ x\in[-1,0]\end{cases}$

$a)$ $\mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_1(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+\sigma_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
$b)$ $\mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_2(x)=\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
$c)$ $\mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_3(x)=\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
$d)$ $\mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_4(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$
$e)$ $\mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_5(x)=\Sigma_{n=0}^{\infty}\alpha_n\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right)$
$f)$ $\mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_6(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\Sigma_{n=1}^{\infty}\gamma_n\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)$

3) Considere a função $f(x):[0,\pi]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=2x-1$. Seja $SF_1(x)$ sua série em senos, e $SF_2(x)$ sua série em cossenos. Esboce nos mesmos eixos os gráficos de $SF_1(x)$ e $SF_2(x)$, para $x\in[-2\pi,2\pi]$.

Dica: você não precisa calcular as séries!

CAPíTULO 6

Derivação e Integração de Séries de Fourier

O objetivo desta aula é calcular rapidamente os coeficientes das séries de Fourier de $f'(x)$ e de $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ a partir dos coeficientes de Fourier de $f(x)$, sempre que possível.

Em primeiro lugar, note que a derivação termo-a-termo da série de Fourier nem sempre nos dá resultados satisfatórios:

EXEMPLO 42 (Dente de Serra). *Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2π tal que $f(x) = x$ para $-\pi < x < \pi$. Não é difícil calcular*

$$f(x) \sim 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\sin mx}{m} = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ...\right)$$

Será que a série de Fourier da derivada de f é a derivada, termo-a-termo, da série de f? Em outras palavras, será que

$$1 \overset{??}{\sim} 2\sum (-1)^{m+1} \cos(mx) = 2(\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + ...)$$

pelo menos no intervalo $(-\pi, \pi)$ onde f é derivável? A resposta é NÃO! De fato, a função constante 1 é a sua própria série de Fourier! Aliás, note que a série do lado direito nem mesmo converge! Por exemplo, para $x = 0$, teríamos a série $2(1 - 1 + 1 - 1 + ...)$, que não converge (oscila entre 2 e 0)! Pior ainda – pela identidade de Parseval, nenhuma função de quadrado integrável pode ter uma série de Fourier com coeficientes $(2, -2, 2, -2, ...)$ como a que está do lado direito, pois a soma de seus quadrados não é finita! Neste caso, a derivação termo a termo da série de Fourier foi um desastre completo!

Por outro lado, se a função periódica $f(x)$ for **contínua** em $\mathbb{R}$, temos o seguinte resultado.

TEOREMA 43 (Derivada da Série de Fourier). *Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$, seccionalmente derivável e **contínua em toda a reta real**. Se a série de Fourier de $f(x)$ é*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

Então a série de Fourier de $f'(x)$ é

$$f'(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

onde $A_0 = 0$, $A_m = \frac{m\pi}{L} b_m$ e $B_m = -\frac{m\pi}{L} a_m$. Ou seja, a série de Fourier de $f'(x)$ pode ser obtida derivando termo a termo a série de $f(x)$.

DEMONSTRAÇÃO. De fato, como f é periódica de período $2L$, então f' também o será. Vamos calcular explicitamente os coeficientes da série de Fourier de $f'(x)$:

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ B_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Como $f(x)$ é contínua, podemos usar o T.F.C. para obter[1]:

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(x)\,dx = \frac{f(L) - f(-L)}{L} = 0$$

[1] O Teorema Fundamental do Cálculo ($\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$) ainda vale se $g(x)$ é diferenciável em $[a, b]$ exceto num número finito de pontos *desde que $g(x)$ seja contínua.* Agora, se $g(x)$ não fosse contínua, não poderíamos usá-lo. Considere, por exemplo, a função $g(x) = [x]$. Temos $g'(x) = 0$ (exceto para valores inteiros de x). Note que neste caso $\int_a^b g'(x)\,dx = 0$ mas $g(b) - g(a) \not\equiv 0$!

onde usamos que $f(L) = f(-L)$ (pois f tem período $2L$). Também podemos integrar por partes[2] e fazer para $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{L}\left(f(x).\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\Big|_{x=-L}^{x=L} + \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\frac{m\pi}{L}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \\ &= \frac{(-1)^m}{L}(f(L) - f(-L)) + \left(\frac{m\pi}{L}\right)\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{m\pi}{L}b_m \\ B_m &= \frac{1}{L}\left(-f(x).\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\Big|_{x=-L}^{x=L} - \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\frac{m\pi}{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \\ &= 0 - \left(\frac{m\pi}{L}\right)\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = -\frac{m\pi}{L}a_m \end{aligned}$$

□

EXEMPLO 44 (Onda Triangular). *Mais uma vez, a série de Fourier da onda triangular $f(x)$ (periódica de período 2π tal que $f(x) = |x|$ para $x \in [-\pi, \pi]$) é*

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + ...\right)$$

Como $f(x)$ é contínua, podemos derivar termo a termo

$$f'(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + ...\right)$$

onde $f'(x)$ é a onda retangular de período 2π definida por $f'(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in (0,\pi) \\ -1, \text{ se } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$.

EXERCÍCIO 45. *a) Seja $g(x)$ a função periódica de período 2π tal que $g(x) = x$ para $x \in [-\pi, \pi)$. Encontre a sua série de Fourier.*
b) Seja $G(x)$ a função periódica de período 2π tal que $G(x) = \frac{x^2}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi)$. Encontre a sua série de Fourier.

Solução: a) Como $g(x)$ é ímpar, sabemos que sua série não terá cossenos. Os coeficientes B_m dos senos serão

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(mx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{m}\cos(mx)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{m}\cos(mx)\,dx = \\ &= (-1)^{m+1}\frac{2}{m} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{m}\right)^2(\sin(mx)|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{(-1)^{m+1}2}{m} \end{aligned}$$

Então

$$g(x) \sim 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\sin(mx)}{m}$$

b) Poderíamos fazer os cálculos como no item acima, mas note que $G(x)$ é contínua (com $G(\pi) = G(-\pi)$ nos extremos de um período) e $G'(x) = g(x)$. Assim, se

$$G(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos(mx) + b_m\sin(mx))$$

O Teorema acima garante que a série de Fourier de $g(x)$ será

$$g(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty}(mb_m\cos(mx) - ma_m\sin(mx))$$

Mas esta última é conhecida do item (a)! Assim, temos:

$$mb_m = A_m = 0 \Rightarrow b_m = 0 \text{ para } m = 1, 2, 3, ...$$

(o que era de se esperar pois $G(x)$ é par) e

$$-ma_m = B_m = \frac{(-1)^{m+1}2}{m} \Rightarrow a_m = \frac{(-1)^m 2}{m^2} \text{ para } m = 1, 2, 3, ...$$

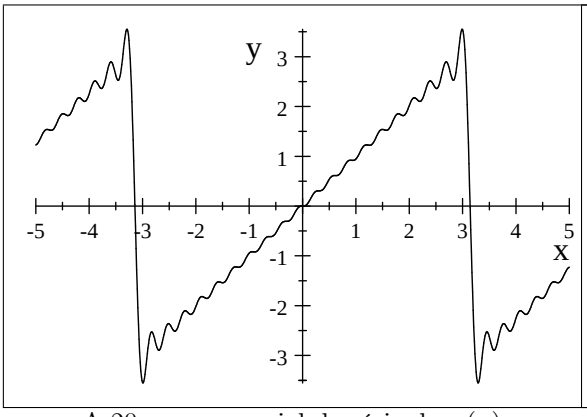
Só falta mesmo calcular a_0, o que pode ser feito diretamente

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{6}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{\pi^2}{3}\right.$$

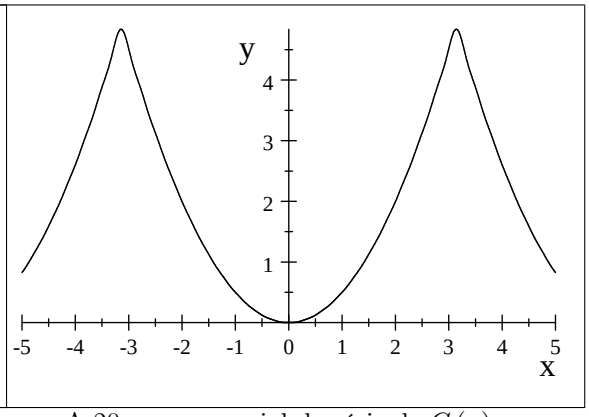
[2] A fórmula de integração por partes é o T.F.C. aplicado à função uv. A nota acima garante a correção deste cálculo pois tanto f como as funções trigonométricas são contínuas.

Assim

$$G(x) \sim \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos(mx)$$



A 20a soma parcial da série de $g(x)$



A 20a soma parcial da série de $G(x)$

A propósito, note as oscilações na vigésima soma parcial de $g(x)$, que são muito mais intensas do que as oscilações presentes na vigésima soma parcial de $G(x)$, especialmente perto das descontinuidades. O mesmo fenômeno é observado nas somas parciais da série de Fourier da onda retangular mas não aparece na onda triangular. Este fenômeno (*fenômeno de Gibbs*) será analisado mais à frente no capítulo 10.

A idéia do exercício anterior pode ser enunciada por um teorema:

TEOREMA 46 (Integração da Série de Fourier). *Seja $f(x)$ uma função periódica seccionalmente contínua de período $2L$ com série de Fourier dada por*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

Então a função $G(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt$ é contínua, periódica de período $2L$ e sua série de Fourier tem a forma

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{L}{m\pi} b_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \frac{L}{m\pi} a_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

(que é exatamente a série de $f(x) - \frac{a_0}{2}$ integrada termo a termo de 0 até x; note a igualdade *nesta segunda expressão!).*

COMENTÁRIO 47. *A constante A_0 pode ser calculada da maneira usual:*

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} G(x)\, dx.$$

DEMONSTRAÇÃO. O T.F.C. garante que $G(x)$ é diferenciável em todos os pontos onde $f(x)$ é contínua, com $G'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$. Nos pontos onde $f(x)$ é descontínua, como existem os limites laterais de $f(x)$, esta função será limitada (não pode se aproximar de $\pm\infty$), e portanto $G(x)$ será contínua. Assim, $G(x)$ é contínua em toda a reta real.

Para mostrar que G é periódica, note que

$$G(x+2L) - G(x) = \int_x^{x+2L} \left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right) dx = \left(\int_x^{x+2L} f(x)\, dx\right) - a_0 L = \int_{-L}^{L} f(x)\, dx - a_0 L = 0$$

pois $f(x)$ é periódica de período $2L$, então sua integral em qualquer intervalo de comprimento $2L$ tem sempre o mesmo valor. Assim, G é periódica de período $2L$.

Sendo assim, podemos calcular a série de Fourier de $G(x)$, digamos

$$G(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

Como G é contínua, podemos aplicar o teorema da derivação de séries de Fourier para encontrar[3]

$$a_m = \frac{m\pi}{L} B_m \text{ e } b_m = -\frac{m\pi}{L} A_m \Rightarrow A_m = \frac{-L}{m\pi} b_m \text{ e } B_m = \frac{L}{m\pi} a_m$$

Enfim, $G(x)$ é *igual* à sua série de Fourier pois $G(x)$ é contínua. □

[3]Note que as letras maiúsculas aqui fazem o papel das minúsculas no enunciado daquele teorema, e vice-versa.

COMENTÁRIO 48. *A constante* $\frac{A_0}{2}$ *pode ser obtida a partir dos* b_m*, mas a expressão raramente é útil. Afinal, tomando* $x = 0$*:*

$$G(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos(0) + B_m \sin(0)) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m$$

Mas $G(0) = \int_0^0 f(x) - \frac{a_0}{2} dx = 0$*. Portanto, temos*

$$\frac{A_0}{2} = -\sum_{m=1}^{\infty} A_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{L}{m\pi} b_m$$

COROLÁRIO 49. *Mais natural seria escrever*

$$\int f(t)\, dt = C + \frac{a_0 x}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{L}{m\pi} a_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \frac{L}{m\pi} b_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

que é a integração termo-a-termo da série de Fourier de $f(x)$*.*

COROLÁRIO 50. *Concluímos que, se* f *é seccionalmente contínua,*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \frac{a_0}{2} dt + \sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \right) dt$$

ou seja, a série de Fourier de uma função seccionalmente contínua pode ser integrada termo a termo num intervalo $[a, b]$ *qualquer.*

EXEMPLO 51. *Vamos calcular a série de Fourier da função periódica de período* 2π *dada por* $h(x) = x^3$ *para* $x \in [-\pi, \pi]$*. Ao invés de fazer cálculos complicados, podemos integrar a série de Fourier do exemplo anterior*[4]

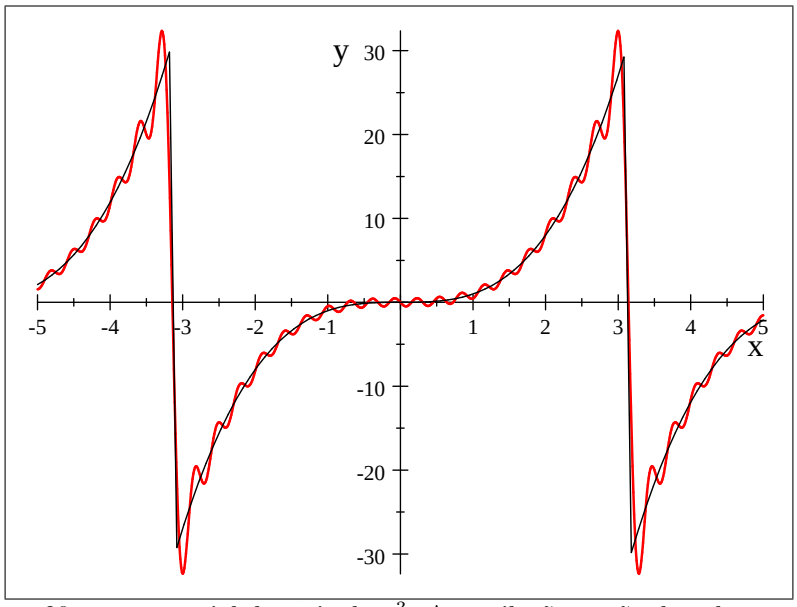
$$\frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos(mx) \Rightarrow \frac{x^3}{6} - \frac{\pi^2 x}{6} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2}{m^3} \sin(mx)$$

Agora, a série de Fourier de x *(com período* 2π*) também já foi calculada acima*

$$x \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} 2 \sin(mx)}{m}$$

(note que aqui não vale a igualdade em $x = \pm\pi$*). Então*

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{6} &\sim \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{2}{m^3} - \frac{2}{m} \frac{\pi^2}{6} \right) \sin(mx) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^3 \sim \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{12 - 2\pi^2 m^2}{m^3} \right) \sin(mx) \end{aligned}$$



20a soma parcial da série de x^3. As oscilações estão de volta.

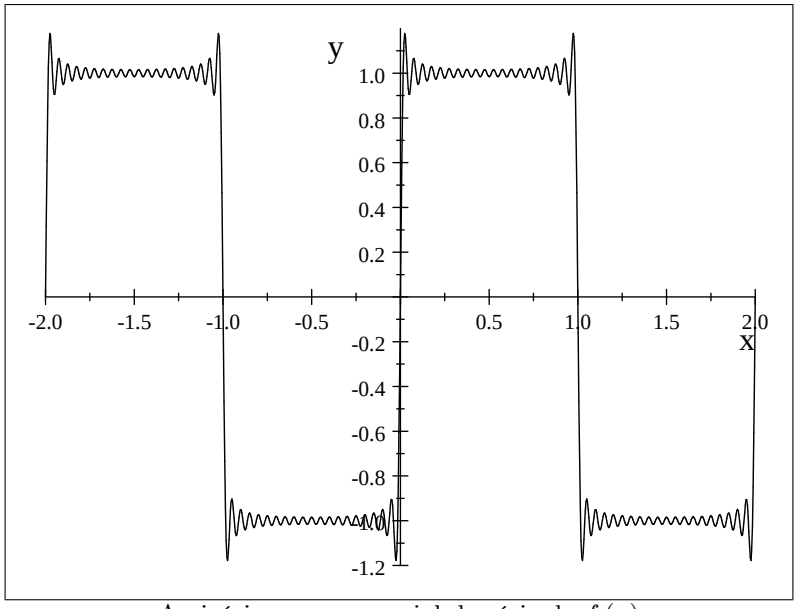
[4]Todas as igualdades a seguir valem para $x \in [-\pi, \pi]$.

6.1. Exercícios

1) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2 tal que $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 < x < 1 \\ -1, \text{ se } -1 < x < 0 \end{cases}$ (uma onda retangular).

a) Mostre que

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{m=1:2}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x)}{m}$$



A vigésima soma parcial da série de $f(x)$

b) Derivando os dois lados desta equação, temos

$$f'(x) = 0 \sim 4 \sum_{m=1:2}^{\infty} \cos(m\pi x)$$

No entanto, o somatório do lado direito não é a série de Fourier da função nula. O que está errado?

2) Mostre que

$$\sin(\pi x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} \cos(2m\pi x) \text{ para } x \in (0,1)$$

e, derivando esta, que

$$\cos(\pi x) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{4m^2 - 1} \sin(2m\pi x) \text{ para } x \in (0,1)$$

Podemos continuar o processo e concluir que

$$\sin(\pi x) = -\frac{16}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{4m^2 - 1} \cos(2m\pi x) \ ?$$

3) Integre 3 vezes a igualdade

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{m} \sin(mx) \text{ para } -\pi < x < \pi$$

para obter uma expressão para $\frac{x^4}{24}$ (não se preocupe em obter a *série de Fourier* de $\frac{x^4}{24}$, apenas uma igualdade!). A partir desta expressão, mostre que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}; \ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^4} = \frac{7\pi^4}{720}$$

Enfim, some estas expressões para obter

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

4) Calcule a série de Fourier da função periódica de período 2π que coincide com x^4 em $[-\pi, \pi]$.

CAPíTULO 7

Forma Complexa da Série de Fourier

Lembremos as seguintes relações entre exponenciais complexas e funções trigonométricas[1]:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Daqui, temos

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ e } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Vamos experimentar substituir estas identidades numa série de Fourier qualquer. Escrevendo $w_0 = \frac{\pi}{L}$ para economizar notação, vem

$$\begin{aligned} SF(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mw_0 x) + b_m \sin(mw_0 x) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{e^{imw_0 x} + e^{-imw_0 x}}{2} - b_m i \frac{e^{imw_0 x} - e^{-imw_0 x}}{2} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m - ib_m}{2} e^{imw_0 x} + \frac{a_m + ib_m}{2} e^{-imw_0 x} \end{aligned}$$

Este somatório pode ser escrito de maneira muito mais elegante se fizermos as seguintes trocas

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_m &= \frac{a_m - ib_m}{2} \text{ para } m = 1, 2, 3, ... \\ c_{-m} &= \frac{a_m + ib_m}{2} \text{ para } m = 1, 2, 3, ... \end{aligned}$$

(**em particular, observe que** $c_{-m} = \bar{c}_m$ **sempre que** $a_m, b_m \in \mathbb{R}$) pois então

$$SF(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imw_0 x}$$

Um exercício simples (exercício 1) é mostrar que os coeficientes c_k acima podem ser obtidos diretamente a partir da função $f(x)$ como

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-ikw_0 x} dx \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Em suma, há uma maneira muito mais elegante de escrever uma série de Fourier, com apenas **uma** sequência de coeficientes:

---

[1] Para o leitor interessado, uma maneira de enxergar esta relação é via séries de potências. Afinal, podemos definir a função e^z da seguinte forma

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + ...$$

que converge absolutamente para todo z complexo. Daqui,

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \frac{i^5 z^5}{5!} + \frac{i^6 z^6}{6!} + ... \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + ... \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...\right) \end{aligned}$$

O primeiro termo acima é exatamente a série de potências da função $\cos z$; o segundo é a série de $\sin z$. Assim

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

para qualquer z complexo. Se, em particular, z é real, então $\cos z$ é a parte real e $\sin z$ é a parte imaginária.

DEFINIÇÃO 52. *Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$. A* ***forma complexa da série de Fourier*** *de $f(x)$ é*

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikw_0 x}$$

onde $w_0 = \frac{\pi}{L}$ e

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-ikw_0 x} dx$$

COMENTÁRIO 53. *Ao invés de c_k, é comum usar a notação*

$$\hat{f}(k) = c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-ikw_0 x} dx.$$

EXEMPLO 54 (Onda Retangular). *Seja $g(x)$, periódica de período 2π, tal que* $g(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } -\pi < x \leq 0 \\ 1, \text{ se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$. *Temos $w_0 = \frac{\pi}{L} = 1$ e portanto*

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-ikx} dx$$

Se $k = 0$, então $c_0 = \frac{1}{2}$. Caso contrário:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-ik\pi} - 1}{-ik} = \frac{i}{2\pi k}\left((-1)^k - 1\right)$$

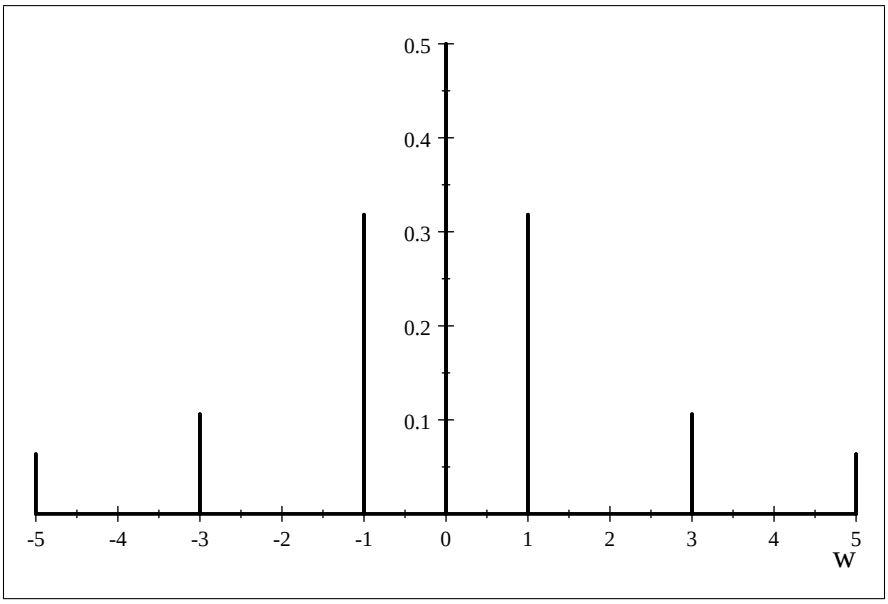
ou seja, juntando tudo

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ se } k = 0 \\ 0, \text{ se } k = \pm 2, \pm 4, ... \\ \frac{-i}{k\pi}, \text{ se } k \text{ for ímpar} \end{cases}$$

e assim

$$g(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n-1)x}}{2n-1}$$

Intepretação física: a onda retangular $g(x)$ é composta por uma componente contínua com amplitude $\frac{1}{2}$ e várias outras componentes, cada uma com frequência $2n-1$ e amplitude $\frac{1}{|2n-1|\pi}$ (o $-i$ é apenas uma mudança de fase[2]). O gráfico dos coeficientes $|c_k|$ é uma representação do sinal chamada ***espectro de frequências*** *do sinal $g(x)$:*



Espectro da onda retangular

[2]Uma onda de freqüência w e amplitude A pode ser imaginada como a função $f(t) = Ae^{iwt} = A\cos wt + iA\sin wt$ (se você não gosta da parte complexa, finja que apenas a parte real é observável). Multiplicar esta onda por um número complexo $z = re^{i\theta}$ produz o seguinte resultado:

$$zf(t) = Are^{i(wt+\theta)} = Ar\cos(wt+\theta) + iAr\sin(wt+\theta)$$

Ou seja, o efeito foi multiplicar a amplitude por r e deslocar a fase (atrasar a onda) em θ unidades – mas a freqüência w da onda permanece inalterada. Por isto, multiplicar por $-i = e^{-i\pi/2}$ significa apenas um atraso de fase de $-\frac{\pi}{2}$ radianos, sem alterar a amplitude.

Note que **a forma complexa da série de Fourier é completamente equivalente à forma real!** Por este motivo, todos os Teoremas já citados para séries de Fourier se aplicam à sua forma complexa, com as devidas adaptações. Por exemplo:

TEOREMA 55 (Convergência). *Se $f(x)$ é seccionalmente suave (e periódica de período $2L = \frac{2\pi}{w_0}$), então*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikw_0 x} = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

TEOREMA 56 (Derivadas). *Se $f(x)$ é periódica de período $\frac{2\pi}{w_0}$, contínua e sua série de Fourier complexa é*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikw_0 x}$$

então sua derivada tem série de Fourier complexa dada por

$$f'(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ikw_0 c_k) e^{ikw_0 x}$$

Em linguagem de Teoria de Sinais, o processo de derivação multiplica a componente de frequência $w = kw_0$ pela constante $ikw_0 = iw$ – na prática, multiplicando a amplitude por w e causando uma mudança de fase. Note que altas frequências são ampliadas mais do que baixas frequências neste processo de derivação.

TEOREMA 57 (Integrais). *Seja $f(x)$ uma função periódica seccionalmente contínua de período $\frac{2\pi}{w_0}$ com série de Fourier complexa dada por*

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikw_0 x}$$

Então a função $F(x) = \int_0^x (f(t) - c_0)\, dt$ é contínua, periódica de período $\frac{2\pi}{w_0}$ e sua série de Fourier é

$$F(x) = C_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{c_k}{ikw_0} e^{ikw_0 x}$$

onde C_0 pode ser calculado a partir de $F(x)$. Em outras palavras

$$\int_0^x f(t)\, dt = C_0 + c_0 x + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{c_k}{ikw_0} e^{ikw_0 x}$$

Em linguagem de Teoria de Sinais, o processo de integração atenua as altas frequências muito mais do que as baixas frequências (possivelmente adicionando uma nova componente contínua).

EXEMPLO 58 (Onda Triangular). *Subtraindo a componente contínua da onda retangular (periódica de período 2π) $g(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } -\pi < x \leq 0 \\ 1, \text{ se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$, ficamos com*

$$g(x) - \frac{1}{2} \sim -\frac{i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n-1)x}}{2n-1}$$

Integrando os dois lados, temos agora uma igualdade:

$$\int_0^x \left(g(t) - \frac{1}{2}\right) dt = C_0 - \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n-1)x}}{(2n-1)^2}$$

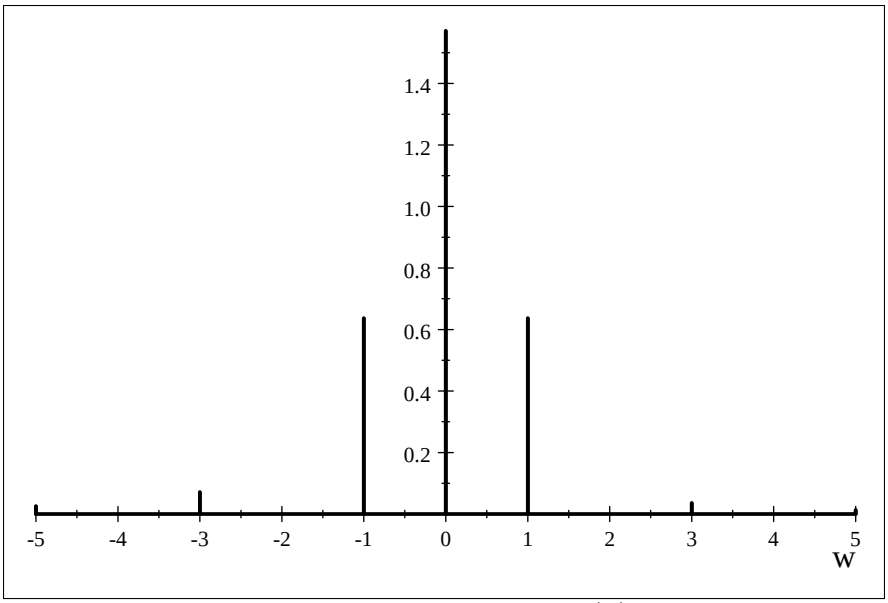
Mas, se $x \in [-\pi, \pi]$ a integral do lado esquerdo é a função $G(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{ se } 0 < x < \pi \\ -\frac{x}{2}, \text{ se - } -\pi < x < \pi \end{cases} = \frac{|x|}{2}$. Então podemos calcular

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{2} dx = \frac{\pi}{4}$$

e daí escrever

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n-1)x}}{(2n-1)^2} \text{ (para } x \in [-\pi, \pi]\text{)}$$

que é a série de Fourier complexa da onda triangular de período 2π que coincide com $|x|$ em $[-\pi, \pi]$.



Espectro da onda triangular $|x|$

Note como o espectro desta onda tem um decaimento muito mais rápido em n do que o da onda retangular.

7.1. Série Complexa e Projeções Ortogonais

É possível obter a série de Fourier complexa diretamente como uma projeção ortogonal, usando o produto interno correto. Mas há um ajuste a ser feito, pois os axiomas de produto interno mudam um pouco para espaços vetoriais cujos escalares são números complexos:

DEFINIÇÃO 59. *Um produto interno em um espaço vetorial E definido sobre $\mathbb{C}$ é uma função*

$$\begin{array}{rccccc} \langle , \rangle : & E & \times & E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & u & , & v & \longmapsto & \langle u, v \rangle \end{array}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

Positividade:	$\forall v \in E,$	$\langle v, v \rangle \geq 0$
(Anti)Simetria:	$\forall u, v \in E,$	$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle};$
Linearidade:	$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \forall u, v, w \in E$	$\langle \lambda_1 u + \lambda_2 v, w \rangle = \lambda_1 \langle u, w \rangle + \lambda_2 \langle v, w \rangle.$

Em suma, um produto interno complexo tem as mesmas propriedades do produto interno real – exceto que $\langle u, v \rangle$ é agora o **conjugado complexo** de $\langle v, u \rangle$.

DEFINIÇÃO 60. *Em $\mathbb{C}^n$, o produto interno canônico é*

$$\langle (x_1, x_2, ..., x_N), (y_1, y_2, ..., y_N) \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i \bar{y}_i.$$

DEFINIÇÃO 61. *No espaço vetorial de todas as funções $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, o **produto interno canônico** é definido por*

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

PROPOSIÇÃO 62. *Considere o espaço das funções $f : [-L, L] \to \mathbb{C}$. Com este produto interno canônico, o conjunto de todas as funções da forma $e_k(x) = e^{ikw_0 x}$ $(k \in \mathbb{Z})$ é ortonormal (onde $w_0 = \frac{\pi}{L}$).*

DEMONSTRAÇÃO. De fato, se m e n são inteiros quaisquer, temos

$$\left\langle e^{imw_0 x}, e^{inw_0 x} \right\rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{imw_0 x} \overline{e^{inw_0 x}} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{i(m-n)w_0 x} dx$$

Agora, se $m \neq n$, a integral acima vale

$$\frac{1}{2L} \left(\frac{e^{i(m-n)w_0 x}}{i(m-n)w_0} \right|_{x=-L}^{x=L} = \frac{e^{i(m-n)w_0 L} - e^{-i(m-n)w_0 L}}{2L(m-n)w_0 i} = \frac{\left(e^{i\pi}\right)^{m-n} - \left(e^{i\pi}\right)^{n-m}}{2L(m-n)w_0 i} = \frac{(-1)^{m-n} - (-1)^{n-m}}{2L(m-n)w_0 i} = 0$$

pois $m-n$ e $n-m$ têm a mesma paridade. Por outro lado, se $m=n$

$$\left\langle e^{imw_0x}, e^{imw_0x}\right\rangle = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^0 dx = 1$$

Assim, o conjunto $\left\{..., e^{-3iw_0x}, e^{-2iw_0x}, e^{-iw_0x}, 1, e^{iw_0x}, e^{2iw_0x}, ...\right\}$ é ortonormal. □

Agora, seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$ e seja $w_0 = \frac{\pi}{L}$. Usando o produto interno canônico em $[-L, L]$, a projeção ortogonal de $f(x)$ sobre o espaço gerado pelos vetores $\vec{v}_k(x) = e^{ikw_0x}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm N)$ é

$$f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikw_0x}$$

onde

$$c_k = \frac{\left\langle f(x), e^{ikw_0x}\right\rangle}{\left\langle e^{ikw_0x}, e^{ikw_0x}\right\rangle} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-ikw_0x} dx$$

Tomando $N \to \infty$, reobtemos a forma complexa da série de Fourier de $f(x)$.

7.2. Exercícios

1) Use diretamente as expressões

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_m &= \frac{a_m - ib_m}{2} \text{ para } m = 1, 2, 3, ... \\ c_{-m} &= \frac{a_m + ib_m}{2} \text{ para } m = 1, 2, 3, ... \end{aligned}$$

para mostrar que

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-ikw_0x} dx$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

2) Obtenha a série de Fourier complexa da função $f(x)$ periódica de período 2π tal que $f(x) = e^x$ se $-\pi < x \leq \pi$, e esboce seu espectro de frequências.

Resposta:

$$f(x) \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{1+ik}{k^2+1} e^{ikx}$$

3) Obtenha a série de Fourier complexa de $f(x) = 2\sin 3x + 4\cos 5x$, e esboce seu espectro de frequências.

Dica: você não precisa fazer nenhuma integral!

4) Obtenha as séries de Fourier complexas de $f(x) = \sin^2 x$ e $g(x) = \cos^4 x$.

Dica: se você substituir estas funções trigonométricas pelas suas versões exponenciais complexas, e depois abrir tudo, nenhuma integral será necessária!

5) Seja $\delta_M(x)$ uma função periódica de período 2π tal que $\delta_M(x) = \begin{cases} M, \text{ se } |x| < \frac{1}{2M} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$ (onde M é uma constante positiva maior do que 1).

a) Encontre a série de Fourier complexa de δ_M e esboce seu espectro de frequências.

b) O que acontece com cada coeficiente c_k à medida que $M \to \infty$?

Comentário: as funções $\delta_M(x)$ se aproximam da "função"impulso unitário $\delta(x)$ (a Delta de Dirac!). Esta função teria as seguintes propriedades no intervalo $x \in [-\pi, \pi]$: i) $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$; ii) $\delta(0) = +\infty$; iii) $\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x)\, dx = 1$ (em outras palavras, aquele infinito em cima do zero tem que ser do tamanho certo para que a "área"embaixo da função $\delta(x)$ seja 1). É claro que não existe uma função real com estas propriedades, mas é possível definir formalmente uma "função generalizada"$\delta(x)$, e, por incrível que pareça, funciona e é útil.

6) a) Suponha que é possível escrever $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$. Calcule $\hat{f}(k)$.

b) Se $f^{(n)}$ é a n–ésima derivada de f e f é periódica de período 2π, verifique que:

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \hat{f}(k)$$

Resposta: a) $\hat{f}(k) = c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx} dx$. *A idéia é a mesma do texto, com* $w_0 = 1$, *usando a notação* $\hat{f}(k)$ *ao invés de* c_k.

b) O Teorema de Derivação é o caso $n = 1$, *mas recomendamos ao leitor obter diretamente esta fórmula usando integração por partes. O caso geral pode ser obtido por indução em* n.

7) Considere a E.D.O. : $f' + af = g$, onde g é contínua e periódica de período 2π.

a) Use o exercício anterior para verificar que: $(ik)\,\hat{f}(k) + a\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$.

b) Conclua que $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(k)}{a+ik} e^{ikx}$. é solução da E.D.O.

8) Sejam u e v vetores de um espaço vetorial complexo. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, mostre que

$$\langle u, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\,\langle u, v\rangle$$

Dica: use primeiro a anti-simetria para trocar a ordem dos vetores, e depois use a linearidade no primeiro vetor.
Resposta: basta notar que

$$\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v, u\rangle} = \overline{\lambda\,\langle v, u\rangle} = \bar{\lambda}\overline{\langle v, u\rangle} = \bar{\lambda}\,\langle u, v\rangle$$

CAPíTULO 8

A Identidade de Parseval

DEFINIÇÃO 63. *A **norma de um vetor** $\vec{v}$ (num espaço vetorial E de acordo com um produto interno previamente definido) é*

$$\|v\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Note que este número é garantidamente real, por causa da positividade do produto interno.

EXEMPLO 64. *Dado $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e usando o produto interno canônico, temos*

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que é o "tamanho"do vetor $\vec{v}$ com o qual estamos acostumados na Geometria Euclideana. Analogamente, dado $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

se estivermos usando o produto interno canônico.

EXEMPLO 65. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Usando o produto interno canônico de $[a, b]$, temos*

$$\|f(t)\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(s)\, ds$$

*Tipicamente, se $f(t)$ é um sinal, a quantidade $\|f(t)\|^2$ é a **energia** deste sinal.*

Qual a relação entre a norma da soma de dois vetores e a norma de cada um deles – ou, na linguagem dos sinais, qual a relação entre a energia da superposição de dois sinais e a energia de cada um deles? Temos:

PROPOSIÇÃO 66.

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\langle f, g \rangle$$

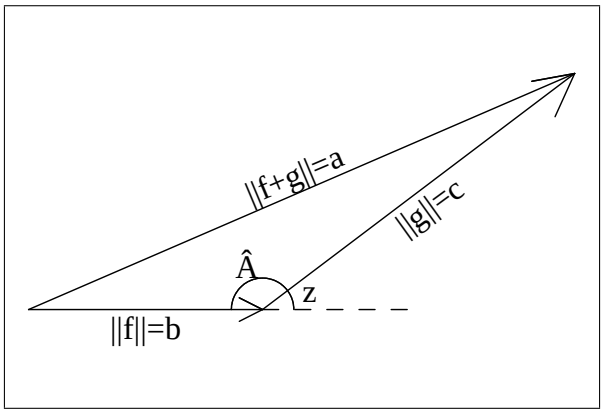
DEMONSTRAÇÃO. Basta usar a distribuitividade do produto interno

$$\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle = \|f\|^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2$$

□

Note que esta é uma versão generalizada da Lei dos Cossenos. De fato, na Geometria Euclideana de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ tínhamos $\langle f, g \rangle = \|f\| \|g\| \cos z$ onde z era o ângulo entre os vetores f e g. Colocando $\|f + g\| = a$, $\|f\| = b$ e $\|g\| = c$, temos a conhecida lei dos cossenos (basta notar que $z = A - \pi \Rightarrow \cos z = -\cos A$):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$



COROLÁRIO 67. *Se f e g são ortogonais, então $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.*

O leitor atento notará que esta é uma generalização do Teorema de Pitágoras. Aliás, por falar em generalização, temos a seguinte proposição cuja demonstração (exercício!) é análoga à da Lei dos Cossenos acima:

PROPOSIÇÃO 68 (Teorema de Pitágoras). *Se $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ são ortogonais e c_1, c_2, ..., $c_n \in \mathbb{R}$, temos*

$$\|c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n\|^2 = c_1^2 \|f_1\|^2 + c_2^2 \|f_2\|^2 + ... + c_n^2 \|f_n\|^2$$

Agora, suponha que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

(o que ocorre, por exemplo, se $f(x)$ for contínua e os coeficientes a_m e b_m vierem de sua série de Fourier). Como os vetores do conjunto $\left\{\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}$ onde $m = 0, 1, 2, ...$ e $n = 1, 2, 3, ...$ são ortogonais dois a dois, não ficaríamos surpresos[1] se valesse uma igualdade semelhante ao Teorema de Pitágoras acima

$$\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{4} \|1\|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \left\|\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\|^2 + b_m^2 \left\|\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\|^2$$

Como já vimos mais cedo (equações 3 na página 8), $\|1\|^2 = 2L$ e $\left\|\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\|^2 = \left\|\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\|^2 = L$, então

$$\|f\|^2 = L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 + b_m^2\right)$$

Mesmo em alguns casos em que a série de Fourier não converge exatamente para $f(x)$, o resultado acima ainda vale (desde que $f(x)$ seja razoavelmente bem comportada). Para ser exato, pode-se mostrar que:

TEOREMA 69 (Identidade de Parseval). *Seja $f(x)$ uma função integrável e de quadrado integrável no intervalo $[-L, L]$ (isto é, $\langle f, f\rangle$ é um número real finito). Então*

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m^2 + b_m^2\right)$$

onde $\{a_m\}_0^\infty$ e $\{b_m\}_1^\infty$ são os coeficientes da série de Fourier de $f(x)$.

EXEMPLO 70. *Voltemos mais uma vez à série de Fourier da onda triangular*

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1))\, x}{(2n-1)^2} \text{ para } x \in [-\pi, \pi]$$

isto é, os únicos coeficientes não-nulos são

$$a_0 = \pi; \qquad a_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)^2}$$

onde $n = 1, 2, ...$ Portanto, pela identidade de Parseval, temos

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2\, dx = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\right)^2$$

Como a integral do lado esquerdo é $\frac{2\pi^3}{3}$, temos mais uma bela identidade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + ... = \frac{\pi^4}{96}$$

EXEMPLO 71. *Voltemos mais uma vez à série de Fourier da onda retangular*

$$g(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1}$$

isto é, os únicos coeficientes não-nulos são

$$a_0 = 1; \qquad b_{2k-1} = \frac{2}{\pi(2k-1)}$$

onde $k = 1, 2, ...$. Pela identidade de Parseval:

$$\frac{1}{1}\int_{-1}^{1} g(x)\, dx = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2k-1)}\right)^2$$

[1] Cuidado, este argumento não é um demonstração rigorosa do jeito que está! O "Teorema de Pitágoras"acima foi demonstrado para somas *finitas*. Agora, estamos prestes a utilizá-lo para uma soma infinita. Nem tudo que vale para somas finitas vale para somas infinitas!

Como a integral do lado esquerdo vale 1*, temos novamente a seguinte identidade*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...=\frac{\pi^2}{8}$$

8.1. Teorema de Parseval Complexo

O Teorema de Parseval pode ser facilmente adaptado para o caso complexo:

TEOREMA 72 (Parseval). *Seja $f(x)$ uma função integrável complexa tal que $\int_{-L}^{L}|f(x)|^2\,dx$ existe. Então*

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(x)|^2\,dx=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_m|^2$$

onde $\{c_m\}_{-\infty}^{\infty}$ são os coeficientes da série de Fourier complexa de $f(x)$.

IDÉIA DA PROVA. A idéia é que, por um lado

$$\langle f(x),f(x)\rangle=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,\overline{f(x)}dx=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(x)|^2\,dx$$

Por outro lado, se pudermos trocar $f(x)$ pela sua série de Fourier complexa:

$$\left\langle\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_me^{imw_0x},\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_me^{imw_0x}\right\rangle=\sum_{i,j=-\infty}^{\infty}c_i\overline{c_j}\,\langle\vec{w}_i,\vec{w}_j\rangle$$

onde $\vec{w}_i=e^{imw_0x}$. Enfim, usando que $\langle\vec{w}_i,\vec{w}_j\rangle=0$ para $i\neq j$ e $\langle\vec{w}_i,\vec{w}_j\rangle=1$ quando $i=j$:

$$\langle f(x),f(x)\rangle=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_j|^2$$

A demonstração acima tem dois grandes furos – o primeiro é que nem sempre $f(x)$ é igual a sua série de Fourier; o segundo é que a propriedade distributiva do produto interno nem sempre vale para somatórios infinitos. No entanto, a demonstração acima contém a **idéia** correta, e preferimos omitir a demonstração formal deste teorema que inclui vários detalhes técnicos. □

8.2. Exercícios

1) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2π tal que $f(x)=\begin{cases}0,\text{ se }-\pi<x\leq 0\\1,\text{ se }0<x\leq\pi\end{cases}$.

a) Calcule a série de Fourier de $f(x)$.

b) Utilize a identidade de Parseval e o item (a) para calcular o valor da série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

c) Use a série do item (a) para calcular $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Resposta: a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$; *b)* $\frac{\pi^2}{8}$; *c)* $\frac{\pi}{4}$.

2) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2 tal que

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{se} \quad x\in[0,1)\\ x-1 & \text{se} \quad x\in[-1,0)\end{cases}$$

Se a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f, calcule $\frac{{a_0}^2}{2}+\Sigma_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$.

3) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2 tal que $f(x)=x^3-x$ para $x\in[-1,1]$.

a) Calcule a série de Fourier de $f(x)$.

b) Utilize a identidade de Parseval para calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

Resposta: a) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m12}{m^3\pi^3}\sin(m\pi x)$ *b)* $\pi^6/945$.

4) Mostre que não existe função $f(x)$ de quadrado integrável tal que

$$f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(mx)}{\sqrt{m}}$$

isto é, função periódica de período 2π cujos coeficientes de Fourier sejam $a_m=0$ $(m=0,1,2,...)$ e $b_m=\frac{1}{\sqrt{m}}$ $(m=1,2,3...)$.

5) Relembre a forma complexa da série de Fourier da Onda Reatngular

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } -\pi < x \leq 0 \\ 1, \text{ se } 0 < x \leq \pi \end{cases} \sim \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n-1)x}}{2n-1}$$

Use-a para re-encontrar o valor de

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

6) Demonstre o "Teorema de Pitágoras"do texto.

CAPíTULO 9

Convergência Pontual e Uniforme

Sabemos que, se $f(x)$ é seccionalmente suave e contínua, a série de Fourier de $f(x)$ "converge"para $f(x)$. Em outras palavras, se analisarmos a seqüência das somas parciais $\{s_0(x), s_1(x), s_2(x), ...\}$ onde

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

esta sequência "se aproxima"de $f(x)$. Nesta seção, discutimos mais formalmente o que queremos dizer com "converge"ou "se aproxima".

Assim, considere uma seqüência de funções $f_n(x)$ onde $n = 1, 2, 3, ...$ Gostarímos de discutir se elas se aproximam em algum sentido da função $f(x)$. Se pensarmos que $f_n(x)$ são estimativas para $f(x)$, é natural considerar a função erro

$$e_n(x) = |f_n(x) - f(x)|.$$

Baseado nesta função erro, temos duas noções de convergência.

DEFINIÇÃO 73 (Convergência simples ou pontual). *Diz-se que uma seqüência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$* ***converge pontualmente*** *para $f : X \to \mathbb{R}$ se, para cada $x \in X$, tem-se $\lim_{n\to\infty} e_n(x) = 0$. Formalmente, isto significa que, dado um "erro aceitável"qualquer $\varepsilon > 0$, para cada $x \in X$, temos um certo $N_0 \in \mathbb{N}$ a partir do qual tem-se $e_n(x) < \varepsilon$. Em símbolos*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \exists N_0 \in N \text{ tal que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ sempre que } n \geq N_0$$

DEFINIÇÃO 74 (Convergência uniforme). *Diz-se que uma seqüência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$* ***converge uniformemente*** *para $f : X \to \mathbb{R}$ se temos*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in X} e_n(x) \right) = 0$$

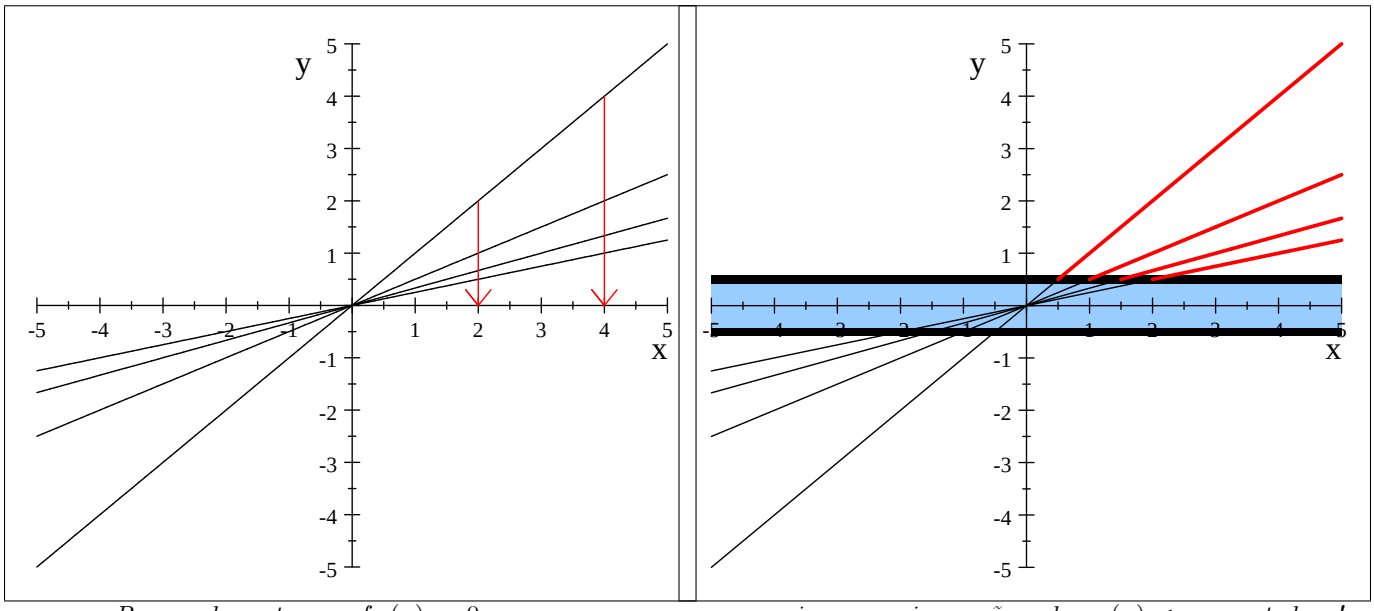
isto é[1]*, dado um "erro aceitável"qualquer $\varepsilon > 0$, temos um certo $N_0 \in \mathbb{N}$ a partir do qual, para todo $x \in X$, tem-se $\sup_{x\in X} e_n(x) < \varepsilon$. Em símbolos*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in N,\ \forall x \in X, \text{ tal que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ sempre que } n \geq N_0$$

A diferença entre os conceitos acima é que na convergência pontual o N_0 pode depender de x, mas na convergência uniforme (dado um $\varepsilon > 0$) tem-se um N_0 que serve para todos os x ao mesmo tempo. Vejamos alguns exemplos para esclarecer esta diferença.

EXEMPLO 75. *Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Para cada x fixo, tem-se $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$, então a seqüência $\frac{x}{n}$* ***converge pontualmente*** *para a função nula. No entanto, dado um erro aceitável $\varepsilon > 0$, é impossível escolher um n tal que $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ para todo x, isto é,* ***a convergência não é uniforme!*** *De fato, note que para cada n temos $\sup_{x\in\mathbb{R}} e_n(x) = +\infty \not\to 0$!*

[1] O supremo de uma função é a menor cota superior que ela admite (o que pode ser um máximo ou uma espécie de "máximo não atingido"). Por exemplo, a função x definida para $0 < x < 1$ não tem máximo igual a 1 (pois ele nunca é atingido), mas tem **supremo** 1. A função $f(x) = 6 - e^x$ não tem máximo 6 (pois ele nunca é atingido), mas tem **supremo** 6.



Para cada x, tem-se $f_n(x) \to 0$, mas... *...por maior que seja n, não vale $e_n(x) < \varepsilon$ para todo x!*

Por exemplo, se quisermos que o erro entre $f_n(x)$ e o limite $f(x) = 0$ seja menor que 0.005, para cada x basta fazer

$$\left|\frac{x}{n}\right| < 0.005 \Rightarrow n > 200\,|x|$$

Assim, para $x = 1$ precisamos passar de f_{200}; para $x = 2$ precisamos pelo menos ir até f_{400}; para $x = 2000$, tome f_{400000} e o erro será menor que 0.005. E assim por diante, cada x com o seu n. Mas não há como tomar um n que faça com que o erro seja menor que 0.005 ***simultaneamente*** *para todo x – qualquer n que você escolha, tome $x > \frac{n}{200}$ e você verá valores de x que "escapam"ao erro "aceitável"de 0.005.*

Em suma, todos os valores de $f_n(x)$ vão "morrer"em $f(x) = 0$... mas não ***"ao mesmo tempo"!***

EXEMPLO 76. *Agora seja $A > 0$ fixo e considere $f_n : [0, A] \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Desta vez, a convergência é uniforme! Afinal,*

$$|f_n(x) - 0| \leq \frac{A}{n} \text{ para todo } x \in [0, A]$$

Assim, dado um erro $\varepsilon > 0$, basta tomar $n > \frac{A}{\varepsilon}$ e garantiremos que $|f_n(x) - 0| \leq \varepsilon$ para todo $x \in [0, A]$. Ou, com a noção de máximo/supremo, a convergência é uniforme pois

$$\max_{x \in [0,A]} e_n(x) = \frac{A}{n} \to 0$$

à medida que $n \to \infty$.

EXEMPLO 77. *Tomemos agora $g_n(x) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dadas por $g_n(x) = x^n$. Pontualmente, veja que*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ 1, \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

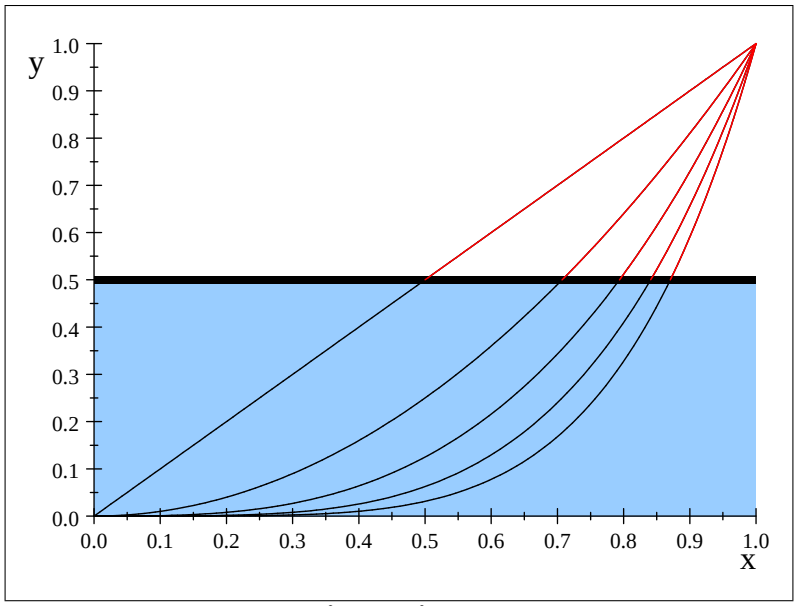
No entanto, esta convergência não é uniforme! De fato, note que para $x < 1$ temos

$$g_n(x) - g(x) = x^n - 0 = x^n$$

que fica arbitrariamente próximo de 1 quando $x \to 1$. Assim

$$\sup_{x \in [0,1]} e_n(x) = 1$$

isto é, o erro máximo nunca fica abaixo de 1. Por este motivo a convergência não é uniforme.

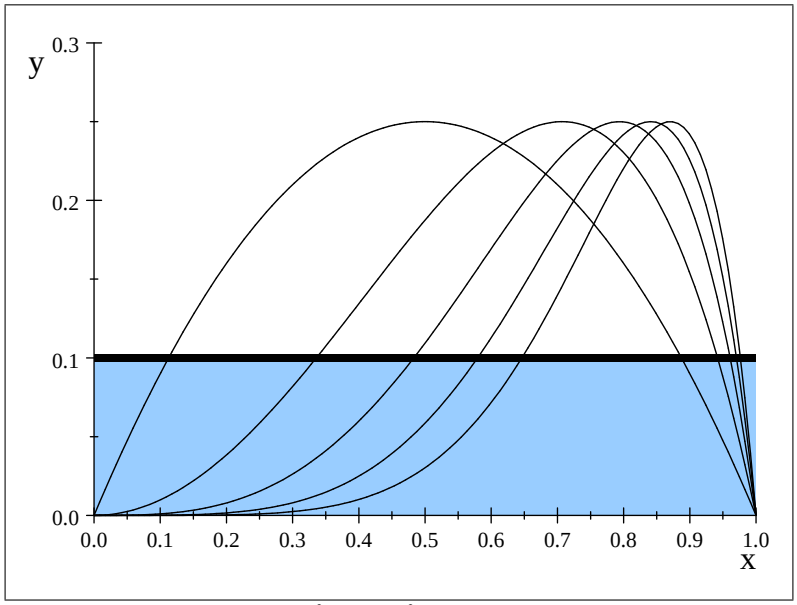


Para $\varepsilon = 0.5$, sempre tem x fora da faixa de raio ε em volta do limite.

EXEMPLO 78. *Tome $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h_n(x) = x^n(1-x^n)$. Novamente, é fácil ver que*

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$$

para cada x. Tomando $e_n(x) = |h_n(x) - 0| = x^n(1-x^n)$, com um pouco de cálculo vê-se que $\max_{x\in[0,1]} e_n(x) = \frac{1}{4}$ (máximo este que ocorre para $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. Assim, $\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} e_n(x) = \frac{1}{4} \neq 0$, e então a convergência não é uniforme.



Para $\varepsilon = 0.1$, sempre tem x fora da faixa de raio ε em volta do limite 0.

A convergência uniforme tem algumas propriedades que a convergência pontual não pode garantir, como veremos a seguir (sem demonstrações).

TEOREMA 79. *Suponha que $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente. Então:*
i) Se cada $f_n(x)$ é contínua em $[a,b]$, então $f(x)$ é contínua em $[a,b]$.
ii) Se cada $f_n(x)$ tem integral em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \text{ quando } n \to \infty$$

Note que o Teorema acima não é válido se a convergência não for uniforme: o exemplo 77 acima mostra que uma seqüência de funções contínuas $g_n(x)$ pode muito bem convergir *pontualmente* para uma função descontínua; por outro lado, o exercício (1) abaixo exibe uma seqüência h_n tal que $h_n(x) \to 0$ pontualmente sem que valha

$\int_0^1 h_n(x)\,dx = \int_0^1 0dx = 0$. Enfim, note que $f_n(x) \to f(x)$ não garante que $f_n'(x) \to f'(x)$ *nem mesmo com convergência uniforme* (veja exercício (2)).

Neste momento, pedimos ao leitor que reflita sobre as conseqüências destas considerações. No primeiro exemplo do capítulo anterior, vimos que

$$x = 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\sin mx}{m} = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ...\right) \text{ para } -\pi < x < \pi$$

O que é um somatório "até infinito"? Ou seja, o que realmente significa aquele "..."? A interpretação correta da expressão acima é: definindo

$$s_n(x) = 2\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}\frac{\sin mx}{m} = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right)$$

temos $s_n(x) \to x$ *pontualmente (à medida que* $n \to \infty$*).* Em geral, uma expressão deste tipo *não pode ser integrada termo-a-termo (a menos que a convergência seja uniforme) nem derivada termo-a-termo (nem que a convergência seja uniforme)*[2].

Para terminar esta seção, vamos agora re-enunciar o Teorema de Convergência de Séries de Fourier usando esta nova linguagem:

TEOREMA 80. *Se* $f(x)$ *é (periódica de período* $2L$*) e seccionalmente suave, então as somas parciais* $s_n(x)$ *da sua série de Fourier convergem* ***pontualmente*** *para*

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$$

(Em particular, se f *é contínua em* $x = x_0$*, então a série de Fourier converge para* $f(x_0)$ *neste ponto).*

Mais ainda, se $f(x)$ *é também contínua em todos os pontos do intervalo* ***fechado*** $[a,b]$*, então a convergência é* ***uniforme*** *no intervalo* $[a,b]$*.*

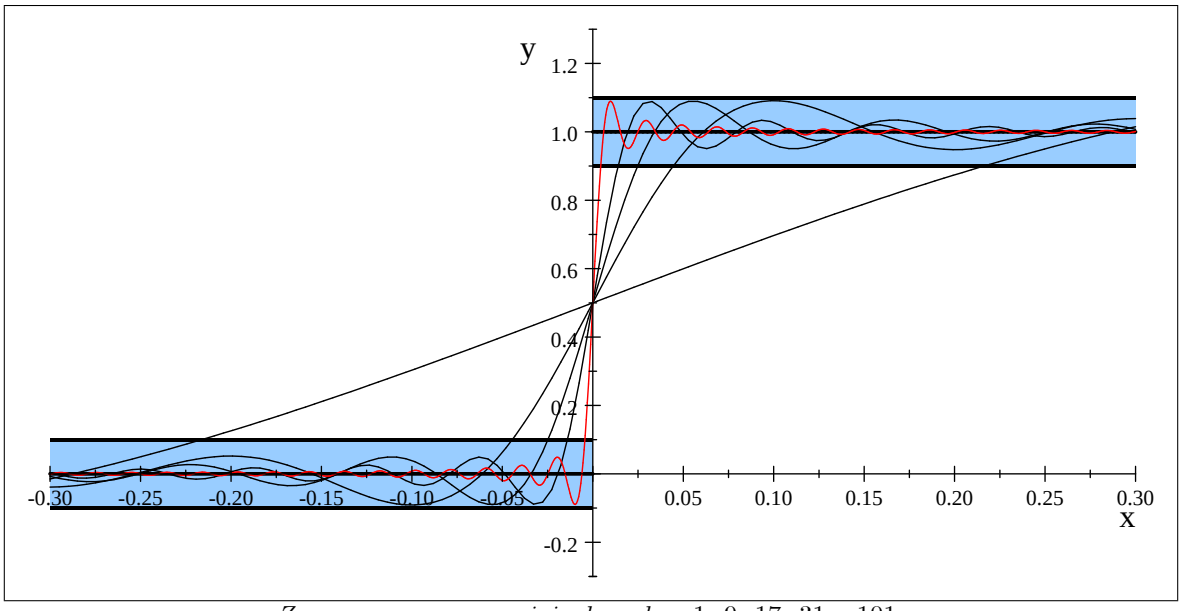
EXEMPLO 81. *Voltemos mais uma vez ao exemplo da onda retangular* $g(x)$*, periódica de período* 2*, tal que* $g(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } -1 < x < 0 \\ 1, \text{ se } 0 < x < 1 \end{cases}$ *. A sua série de Fourier é*

$$g(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5} + ...\right)$$

Pelo Teorema de Convergência, já sabemos que esta série de Fourier converge para $g(x)$ *exceto nos pontos da forma* $x = k \in \mathbb{Z}$*. Nestes pontos,* g *é descontínua, e a série de Fourier convergirá para* $\frac{g(k+)+g(k-)}{2} = \frac{1}{2}$*.*

Portanto, a série de Fourier converge para uma função descontínua, e, por este motivo, a convergência não pode ser uniforme em toda a reta real (como sin *e* cos *são contínuas, quando a série de Fourier convergir uniformemente, o limite tem de ser contínuo). Isto dito, como* $g(x)$ *é contínua nos intervalos fechados da forma* $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ *(onde* $0 < \varepsilon < 1$*), dentro deles a série de Fourier converge uniformemente para* 1 *(e, analogamente, a série converge uniformemememente para* 0 *nos intervalos fechados da forma* $[-1+\varepsilon, -\varepsilon]$*). Note que o Teorema* ***não garante*** *convergência uniforme no intervalo* $(0,1)$*, apesar de* $g(x)$ *ser contínua ali – o problema é que este intervalo não é fechado, então o Teorema não se aplica.*

[2]Isto dito, para séries de Fourier, estas séries **podem** ser derivadas e integradas termo-a-termo **nas condições dos teoremas do capítulo anterior**.

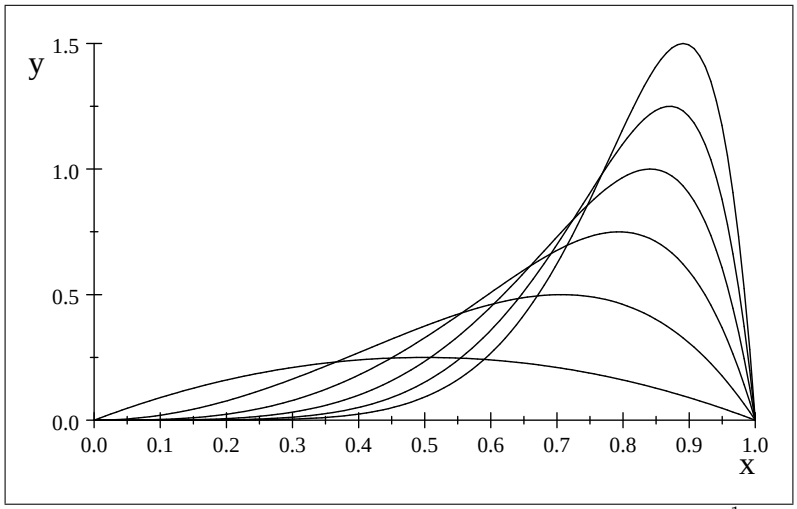


Zoom nas somas parciais de ordem 1, 9, 17, 31 *e* 101.

Para entender melhor a convergência não-uniforme da série de Fourier da onda quadrada, veja o gráfico acima[3]*: o gráfico vermelho, mais "oscilante", tem termos de ordem até* 101 *da série de Fourier, mas ainda há um pequeno pedaço dele que fica fora da faixa definida por "erro máximo de* 0.1 *em volta do limite* $g(x)$*". De fato, por maior que seja* N*, a soma parcial* $s_N(x)$ *jamais estará completamente contida naquela faixa – o erro máximo entre* $s_N(x)$ *e* $g(x)$ *será sempre* 0.5 *(que ocorre logo à direita do ponto* $x = 0$*).*

9.1. Exercícios

1) Considere a seqüência de funções $h_n(x) = nx^n(1 - x^n)$ para $x \in [0, 1]$.
a) Mostre que $h_n(x) \to 0$ pontualmente.
b) Mostre que $\int_0^1 h_n(x)\,dx \to \frac{1}{2}$ à medida que $n \to \infty$.
c) Conclua que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(x)\,dx \neq \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} h_n(x))\,dx$.



$h_n(x) \to 0$ mas a área sob o gráfico de h_n se aproxima de $\frac{1}{2}$.

2) Considere a seqüência $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.
a) Mostre que $f_n(x) \to 0$ pontualmente e uniformemente (quando $n \to \infty$).
b) Mostre que $f_n'(x) \not\to 0$ à medida que $n \to \infty$.

3) A série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 2π dada por $f(x) = x$ para $-\pi < x \leq \pi$ é

$$f(x) \sim 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\sin mx}{m} = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ...\right)$$

[3] No gráfico, usamos escalas distintas para x e y para destacar o intervalo $x \in [-0,3, 0.3]$.

Pergunta-se:

a) Esta série converge para $f(x)$ em toda a reta real? Mais especificamente, em que pontos a série não converge para $f(x)$? Para onde a série converge nestes pontos?

b) A convergência desta série é uniforme?

c) Falso ou verdadeiro:

$$\lim_{N\to\infty} 2\sum_{m=1}^{N}(-1)^{m+1}\frac{\sin mx}{m} = x$$

pontualmente para cada $x \in [5,6]$.

d) Falso ou verdadeiro: dado um erro máximo aceitável $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$\left| x - 2\sum_{m=1}^{N}(-1)^{m+1}\frac{\sin mx}{m} \right| < \varepsilon$$

para todo $x \in [-\pi,\pi]$. Justifique.

e) Falso ou verdadeiro: dado um erro máximo aceitável $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$\left| x - 2\sum_{m=1}^{N}(-1)^{m+1}\frac{\sin mx}{m} \right| < \varepsilon$$

para todo $x \in [0,1]$. Justifique.

Respostas: a) A série não converge para $f(x)$ nos pontos da forma $x = k\pi$ (onde $k \in Z$). Nestes pontos, a série converge para $\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{\pi+(-\pi)}{2} = 0$.

b) Não é uniforme – uma série de funções contínuas não pode convergir uniformemente para uma função descontínua, como é o caso aqui.

c) Falso. Lembre que $f(x) = x$ apenas para $x \in (-\pi,\pi)$! No intervalo $[5,6]$, $f(x) = x - 2\pi$ (pela periodicidade), então

$$2\sum_{m=1}^{N}(-1)^{m+1}\frac{\sin mx}{m} \to x - 2\pi$$

d) Falso. A frase é equivalente a dizer que a convergência é uniforme em $[-\pi,\pi]$ – e a função limite é descontínua em $-\pi$ e π.

e) Verdadeiro. A frase é equivalente a dizer que a convergência é uniforme em $[0,1]$, o que é garantido pelo Teorema de Convergência já que $f(x)$ é contínua neste intervalo (e seccionalmente suave).

CAPíTULO 10

O Fenômeno de Gibbs

Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$ e considere as somas parciais $S_n(x)$ de sua série de Fourier, isto é

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

Vimos que, quando $f(x)$ não é contínua, a convergência de $S_n(x)$ para $f(x)$ não pode ser uniforme. Além disso, em todos os exemplos que vimos até aqui, apareciam oscilações em $S_n(x)$, oscilações estas que eram especialmente ruins perto da descontinuidade. O aparecimento destas oscilações é chamado de **fenômeno de Gibbs**.

Mais ainda, é notável que a soma parcial $S_n(x)$ parece amplificar a amplitude do salto perto da descontinuidade. Vamos analisar este efeito através do exemplo mais simples de salto: uma onda retangular.

EXEMPLO 82. *Seja* $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } -\pi < x < 0 \\ -1 \text{ se } 0 < x < \pi. \end{cases}$ *periódica de período* 2π. *Como* f *é ímpar, sua série será em senos*

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos(mx)}{m}\right|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^m}{m}$$

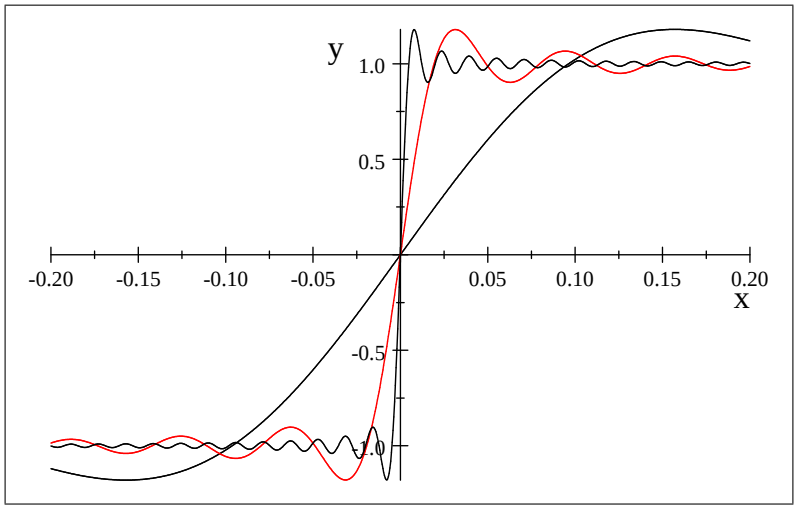
ou seja

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right)$$

Analisemos a soma parcial

$$S_{2N-1}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ... + \frac{\sin(2N-1)x}{2N-1}\right)$$

A seguir, mostramos os gráfico de S_{19}, S_{199} *e* S_{399} *para valores de* x *bem próximos de* $x = 0$. *Além da convergência não ser uniforme, a amplitude da primeira oscilação (a mais próxima de* $x = 0$*)* ***não parece estar se aproximando do tamanho do salto****! Em outras palavras, a altura do primeiro máximo de* $S_N(x)$ *não parece estar se aproximando de* 1*! Este é o fenômeno que desejamos investigar cuidadosamente a seguir.*



Calculemos então as coordenadas do ponto onde ocorre este primeiro máximo. Ali, devemos ter

$$S'_N(x) = 0 \Rightarrow \cos x + \cos 3x + ... + \cos(2N-1)x = 0 \Rightarrow \frac{\sin 2Nx}{2\sin x} = 0 \Rightarrow \sin(2Nx) = 0$$

onde usamos a "famosa"fórmula da soma dos cossenos de arcos em P.A. (veja exercício 1). Portanto, os extremos locais de S_N *ocorrem para* $x = \frac{\pi}{2N}$ *e seus múltiplos (exceto* 0*).*

Como estamos interessados apenas naquele primeiro máximo local, tomemos $x = \frac{\pi}{2N}$. *A altura deste máximo é*

$$S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2N} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2N} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2N} + ... + \frac{1}{2N-1}\sin\frac{(2N-1)\pi}{2N}\right)$$

Como calcular o limite M *desta expressão quando* $N \to \infty$*? Um novo truque nos ajuda: escreva* $x_k = \frac{(2k-1)\pi}{2N}$ *onde* $k = 1, 2, ..., N$. *Então*

$$\begin{aligned} S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) &= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2N}}{\frac{\pi}{2N}} + \frac{\sin\frac{3\pi}{2N}}{3.\frac{\pi}{2N}} + \frac{\sin\frac{5\pi}{2N}}{5.\frac{\pi}{2N}} + ... + \frac{\sin\frac{(2N-1)\pi}{2N}}{(2N-1).\frac{\pi}{2N}}\right)\frac{\pi}{2N} = \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x_1}{x_1} + \frac{\sin x_2}{x_2} + \frac{\sin x_3}{x_3} + ... + \frac{\sin x_N}{x_N}\right)\frac{\pi}{N} \end{aligned}$$

Enfim, note que os pontos x_k *formam uma amostragem uniforme do intervalo* $[0, \pi]$ *com* $\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{N}$. *Então*

$$\frac{\pi}{2}S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\sin x_i}{x_i}\Delta x \Rightarrow \frac{\pi}{2}M = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx$$

usando a definição da Integral de Riemann. Assim, a altura do primeiro máximo se aproxima de

$$M = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx$$

Esta integral não pode ser resolvida usando funções elementares – agora, usando a função Seno Integral

$$\mathrm{Si}\,(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$$

fica bem fácil escrever e calcular numericamente

$$M = \frac{2}{\pi}\mathrm{Si}\,(\pi) \approx 1.179\,0$$

Ou seja, a altura do primeiro máximo local tende a aproximadamente 1.18. *Analogamente, o primeiro mínimo local à esquerda de* $x = 0$ *tende a altura* -1.18. *O intervalo* $[-1.18, 1.18]$ *é chamado de* Intervalo de Gibbs *da série de Fourier de* $f(x)$ *no ponto* $x = 0$. *Assim, o salto, que deveria ser de* 2 *unidades, acaba sendo de* 2.36 *– um erro de* 18% *na estimativa do tamanho do degrau, mesmo quando* $N \to \infty$*!*

Para terminar, mencionaremos sem demonstração que o erro de 18% não é restrito a este exemplo – em qualquer função que seja a soma de uma função contínua com um degrau (o que inclui todas as funções descontínuas que usaremos), a série de Fourier (quando o número de termos é grande) exagera o tamanho deste degrau em aproximadamente 18%, sendo 9% a mais no degrau mais alto e 9% a menos no degrau mais baixo.

10.1. Exercícios

1) Deduza a fórmula da soma dos cossenos de arcos em P.A. (para $a \neq 0$):

$$\cos x + \cos(x + 2a) + \cos(x + 4a) + ... + \cos(x + 2na) = \frac{\sin(x + (2n+1)a) - \sin(x - a)}{2\sin a}$$

Dica: multiplique a expressão à esquerda por $2\sin a$ *e depois transforme cada produto em soma.*

2) Considere a função $f(x)$ dente de serra periódica de período 2π tal que $f(x) = x$ para $x \in (-\pi, \pi)$. Qual o valor do salto desta função em $x = \pi$? Em quanto você estima o valor do salto correspondente na soma parcial $S_N(x)$ para N grande perto de $x = \pi$?

3) Encontre uma fórmula simples para

$$\sin x + \sin(x + 2a) + \sin(x + 4a) + ... + \sin(x + 2na)$$

4) a) Prove que, se $q \neq 1$,

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

b) Escreva cada termo da expressão

$$S = \sum_{k=0}^{n}\cos(x + 2ka)$$

como uma soma de exponenciais complexas. Agora divida a expressão resultante em dois somatórios de exponenciais complexas, e note que cada um é a soma dos termos de uma P.G. Use a fórmula do item (a) e chegue a uma outra expressão simples para S.